ZUR DREIDIMENSIONALEN TOPOLOGIE

KURT REIDEMEISTER

Die folgenden Betrachtungen sind dem sog. Heegaard - Diagramm dreidimensionaler Manuigfaltigkeiten gewidmet. Unter einem solchen Diagramm versteht man ein gewisses kombinatorisches Schema, das, jedoch nicht wie das übliche aus beliebig vielen Zellen, sondern aus gerade zwei Vollbrezeln besteht, deren Randflächen zusammenfallen. Unter einer Vollbrezel vom Geschlecht p werde dabei ein Raum verstanden, der sich topelegisch auf die Vollkugel mit p Vollhenkeln abbilden läßt. Sind irgend zwei Brezeln desselben Geschlechts vorgelegt, so kann man durch eine beliebige topologische Abbildung ihrer Randflächen daraus dreidimensionale geschlossene Manuigfaltigkeiten konstruieren. Umgekehrt kann man auch jedeorientierbare Mannigfaltigkeit so darstellen. Ist nämlich irgendein Zellschema einer geschlossenen Mannigfaltigkeit gegeben, so lege man tun jede Strecke des Schemas einen kleinen Zylinder, um jeden Eckpunkt eine kleine Kugel; die Vereinigungsmenge dieser Zylinder und Kugeln bildet alsdann eine Vollbrezel V_1 und ebenso der Restraum V_2, der aus der Mannigfaltigkeit entsteht, wenn man V_1 herausnimmt.

Ein Heegaard-Diagramm läßt sich leicht in ein Schema aus zwei dreidimensionalen Zellen verwandeln, die je p-mal an sich selbst anstoßen, wenn die Brezeln das Geschlecht p haben. Es gibt nämlich gewiß je p Flächenstücke f_{ki} $(k = 1, 2; i = 1, 2, ..., p)$, welche V_k in eine Zelle zerlegen; die Ränder $\mathfrak{r}_{ki}$ der f_{ki} sind dabei einfache Kurven auf der Randfläche $\mathfrak{R}$ der Brezeln, und zwar zerlegen die Systeme mit gleichem Index k je die Fläche $\mathfrak{R}$ in eine Kugelfläche mit $2p$ Löchern. Durch weitere Unterteilung von $\mathfrak{R}$ läßt sich die Figur so ergänzen, daß auch der Rand $\mathfrak{R}$ ein Flächenstck mit Selbstberührungen wird. Man sieht daraus, daß man eine Mannigfaltigkeit durch eine Fläche $\mathcal{R}$ vom Geschlecht p mit zwei Systemen von einfachen Kurven $\mathfrak{r}_{ki}$ $(k = 1, 2; i = 1, 2, ..., p)$ erklären kann, die offenbar nur durch die Forderung einzuschränken sind, daß sowohl $\mathfrak{r}_{1i}$ wie $\mathfrak{r}_{2i}$ die Fläche $\mathfrak{R}$ in eine Kugel mit $2p$ Löchern zerlegen.

Originally published in Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitt Hamburg, 1933, p. 189-194.

Natürlich ist es auch möglich, die Vollbrezeln einer weiteren Unterteilung zu unterwerfen und sie in eine endliche Anzahl von Zellen zu zerlegen; hält man nur an der Einschränkung' fest, daß die Rändel; der zerlegenden Flächeustücke einfache ganz auf $\mathfrak{R}$ verlaufende Kurven sind, so kann man auch jetzt noch das Schema durch eine Fläche $\mathfrak{R}$ mit zwei Systemen von nach "innen" bzw. nach "außen" zusammenziehbaren Kurven erklären.

Die enge Beziehung eines so erweiterten Heegaard-DiagTamms zu dem gewöhnlichen Zellschema legt es nahe, das Heegaard-Diagramm zu der grundlegenden Definition der Homöomorphie von Mannigfaltigkeiten heranzuziehen. Zu diesem Zwecke verfolgen wir die Verwandlung eines beliebigen Zellschemas in ein Heegaard-Diagramm etwas genauer.

Berandet der Eckpunkt P_α des Zellschemas die Strecke s_β einmal, so treffe der Zylinder um s_β die Kugel um P_α in der einfachen Kurve $\mathfrak{r}_{1,\alpha\beta}$. Ist f_γ ein Flächenstck des Zellschemas, so treffe f_γ die Randftäche $\mathfrak{R}$ der Vollbrezel V_1 in der einfachen Kurve $r_{2,\gamma}$. Das dem Schema zugeordnete Heegaard-Diagramm besteht alsdann aus $\mathfrak{R}$ mit den sämtlichen Kurven $\mathfrak{r}_{1,\alpha\beta}$ und $r_{2,\gamma}$. Offenbar ist es leicht möglich, aus dem Heegaard-Diagramm das Zellschema zurückzugewinnen, wenn man noch angibt, daß die Brezel V_1 den Streckenkomplex liefern soll. Jedem Punkt entspricht je eine Kugel innerhalb von V_1, auf die eine bestimmte Anzahl von Zylindern stoßen, Man hat also nur in diese Zylinder Strecken einzuzeichnen, die sich bei einer Abbildung des Zylinders in einen Kreiszylinder in die Achse des letzteren überführen lassen, und diese Strecken in die den Punkten entsprechenden Kugeln hinein bis zu einem "Mittelpunkt" derselben zu verlängern. Es lassen sich dann weiterhin einfache Bänder konstruieren, die einerseits von den Kurven $\mathfrak{r}_{2,gamma}$ und andererseits von geeigneten Streckenzgen des soeben konstruierten Streckenkomplexes berandet werden; dieselben lassen sich durch Flächenstücke, welche sieh innerhalb V_s in die $\mathfrak{r}_{2,\gamma}$ einspannen lassen, zu den Flächenstcken f_γ ergänzen. Vertauscht man die Rolle von V_1 und V_2 so entsteht der duale Komplex.

Wir wollen jetzt zusehen, wie sich die elementaren Transformationen des Zellschemas auf das Heegaard-Diagramm auswirken. Von Interesse sind dabei nur die Abänderungen des Streckenkomplexes. Läßt man die Strecke s_β, die von P_{α_1} nach P_{α_2} führt, zusammenschrumpfen und vereinigt so P_{α_1} und P_{α_2} zu P_α, so sind im Diagramm die Kurven $\mathfrak{r}_{1,\alpha_1\beta}$ und $\mathfrak{r}_{1,\alpha_2\beta}$ fortzulassen. Man kann so alle Punkte P_α bis auf einen entfernen und erhält so schließlich ein Diagramm mit gerade $2p$ nach V_1 zusammenziehbaren Randkurven. V_1 erscheint dabei so zerlegt, wie eine Vollkugel mit p Vollhenkeln durch die Kugelfläche, auf welche die Henkel aufgesetzt sind, zerlegt wird. Je zwei der $2p$ Kurven sind isotop zueinander. Durch Fortlassen von je einer von den zwei isotopen Kurven erhält man ein System $\mathfrak{r}_{1,i}$ $(i = 1, 2, ..., p)$, welches $\mathfrak{R}$ in eine Kugel mit $2p$ Löchern zerschneidet.

Die inversen Abänderungen, das Ersetzen eines Punktes des Zellschemas durch zwei mit einer neu hinzugefügten Strecke verbundene Punkte, lassen sich in ihrer Wirkung auf das Diagramm nun ebenfalls übersehen. Deformieren wir das Streckenschema, indem wir den Endpunkt einer Strecke s_{β_1} über eine andere Strecke s_{β_2} entlang gleiten lassen, vom Anfangspunkt von s_{β_2} bis zu ihrem Endpunkt, so induziert dieser Prozeß im Heegaard-Diagramm gerade drei Abänderungen der besprochenen Art. Hierbei bleibt also sowohl das Geschlecht von $\mathfrak{R}$ sowie die Art der Einbettung von $\mathfrak{R}$ in die Mannigfaltigkeit erhalten, d. h. $\mathfrak{R}$ wird nur Deformationen unterworfen.

Die Erweiterung des Streckenkomplexes durch Unterteilung eines Flächenstückes kann man durch Deformation des Streckenkomplexes auf den Fall zurückführen, daß eine singuläre Strecke mit demselben Anfangs- und Endpunkt eingeführt wird, die für sich ein Flchenstck berandet. Dem entspricht eine Abänderung von $\mathfrak{R}$, V_1, V_2 in $\mathfrak{R}'$, V_1', V_2', bei der sich das Geschlecht um 1 erhöht; es wird ein Henkel angefügt, der sich durch eine Kurve $\mathfrak{r}$ abtrennen läßt, die sowohl in V_1' wie V_2' zusammenziehbar ist, in die sich genauer sowohl ein ganz in V_1' wie ein ganz in V_2' verlaufendes Flächenstck einspannen läßt.

Aus der Tatsache, daß zwei homöomorphe Zellschemata eine gemeinsame Ableitung haben, folgt, daß die Flächen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}'$ zweier homöomorpher Heegaard-Diagramme sich durch Hinzufügen von Henkeln, die je längs nach außen und innen zusammenziehbaren Kurven anstoßen, in Flächen $\mathfrak{R}^*$ und $\mathfrak{R}'^*$ überführen lassen, die ineinander deformierbar sind. Diese Diagramme sind dann weiterhin durch Einfügung und Fortnahme von Flächenstckcn, deren Rand einfach ist und auf $\mathfrak{R}^*$ bzw. $\mathfrak{R}'^*$ liegt, in dasselbe Diagramm verwandelbar.

Geometrisch ist die damit vorgenommene Zweiteilung der Entscheidung über Homöomorphie deswegen wichtig', weil die Klassifikation der Flächen $\mathfrak{R}$ einer Mannigfaltigkeit und die möglichen Unterteilungen von Vollbrezeln je für sich, auch unabhängig vom Homöomorphieproblem, Interesse verdienen. Betrachtet man diesen Ansatz für die Sphäre, so lassen sich hier offenbar die Flächen $\mathfrak{R}$ vom Geschlecht p stets in eine Kugel mit p Henkeln deformieren. Dies gilt jedenfalls für das Diagramm, das dem Sphärenschema aus je einer Zelle der nullten, ersten, zweiten und dritten Dimension zugeordnet ist; $\mathfrak{R}$ ist hier ein unverknoteter Ring. Es gilt ferner für alle Diagramme, die Schematen entsprechen, welche durch direkte Unterteilung aus dem angegebenen entstehen. Es ist also nur noch der Prozeß der Streckenreduktion zu prüfen. Wir denken uns diesen Prozeß wieder aus einer Deformation, bei welcher im Streckenschema nur die Zllentfernende Strecke s_β betroffen wird und sich durch Verschiebung ihres E dpunktes in eine singuläre Strecke mit eingespanntem Flächenstck verwandelt, und der Fortnahme dieser singulären Strecke zusammengesetzt. Die entsprechende Abänderung von $\mathfrak{R}$ läßt sich dann folgendermaßen beschreiben: $\mathfrak{r}_{1,\alpha_1\beta}$ entspreche dem Anfangs-, $\mathfrak{r}_{1,\alpha_2\beta}$ dem Endpunkt von s_β. $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ seien zwei einfache Parallelwege auf $\mathfrak{R}$, die von zwei Punkten auf $\mathfrak{r}_{1,\alpha_1\beta}$ zu zwei Punkten auf $\mathfrak{r}_{1,\alpha_2\beta}$ führen; längs des Streifens auf $\mathfrak{R}$, der durch die $\mathfrak{d}_1$ und zwei Bögen der $\mathfrak{r}_{1,\alpha_i\beta}$ abgegrenzt wird, möge der s_β entsprechende Zylinderteil entlang gleiten, bis $\mathfrak{r}_{1,\alpha_2\beta}$ in die unmittelbare Nachbarschaft von $\mathfrak{r}_{1,\alpha_1\beta}$ kommt. Die Wege $\mathfrak{d}_i$ und die komplementären Kurvenstücke der $\mathfrak{r}_{1,\alpha_i\beta}$ bilden dann eine Kurve $\mathfrak{c}$, in die sich sowohl ein ganz in V_1 verlaufendes Flächenstück f_1, wie ein ganz in V_2 verlaufendes f_2 einspannen läßt. Die Kugel aus f_1 und f_2 trennt einen unverknoteten Torus ab, der den s_β entsprechenden Zylinder, teil enthält. Die Deformation von $\mathfrak{R}$ kann man sich auch durch ein allmähliches Zusammenschrumpfen des streifen artigen Flächenstcks f_1 bewirkt denken (Fig.1). Wird nun $\mathfrak{R}$ in eine Kugel $\mathfrak{B}_p$ mit p Henkeln deformiert, so geht dabei $\mathfrak{c}$ in eine Kurve $\mathfrak{c}'$ über, in die sich wieder sowohl im Innern wie im Äußern von $\mathfrak{B}_p$ ein Flächenstück f_1' bzw. f_2' einspannen läßt. Trennt man längs $\mathfrak{c}'$ den s_β entsprechenden Torus ab und ersetzt ihn durch f_i', so verwandelt sich $\mathfrak{B}_p$ offenbar in eine Kugel $\mathfrak{B}_{p-1}$ mit $p-1$ Henkeln. Ein genauer Beweis dieser Tatsache hätte an die Untersuchung der nach innen und außen zusammenziehbaren Kurven $\mathfrak{c}'$ von $\mathfrak{M}_p$ anzuknüpfen. Damit ist dann die Frage nach der Kennzeichnung der Sphäre auf die Frage zurückgeführt, wie sich die Vollkugel mit p Vollhenkeln und der Restraum derselben durch je $2p$ Flächenstücke in eine Zelle zerlegen läßt.

Die Heegaard-Diagramrne für $p = 1$ sind vollständig untersucht [1]. Es gibt hier nur eine Möglichkeit, V_1 bzw. V_2 durch je ein Flächenstck zu zerlegen. Ein solches Diagramm für eine Mannigfaltigkeit mit der Identität als Fundamentalgruppe ist nach einfacher Normierung vollständig bestimmt; es enthält zwei einfache Kurven $\mathfrak{r}_l$, $\mathfrak{r}_2$, die nur einen Schnittpunkt haben und daher die Torusfläche kanonisch in ein Viereck zerlegen. Bildet man das Diagramm auf den Torus des euklidischen Raumes ab, so daß V_1 in das Innnere dieses Torus und $\mathfrak{r}_1$ in eine Meridiankurve desselben übergeht, so braucht dabei $\mathfrak{r}_2$ keineswegs schon in eine im euklidischen Raum nach außen zusammenziehbare Breitenkurve übergegangen zu sein. Gibt man mit anderen Worten ein HeegaardDiagramm vor, indem man auf einen Vollring des euklidischen Raumes eine Kurve $\mathfrak{r}_2$ einzeichnet, die in der zu erklärenden Mannigfaltigkeit nach “außen” zusammenziehbar sein soll, so darf man daraus, daß $\mathfrak{r}_2$ im gewöhnlichen Raum nicht zusammenziehbar ist, nicht etwa folgern, daß die Mannigfaltigkeit von der Sphäre verschieden sei. Ein diesem Irrtum gleichwertiger Fehler ist im Enzyklopädiebericht III A B 3, S. 108, 6. Zeile von oben ff., bei der Erklärung der Poincaréschen Mannigfaltigkeiten unterlaufen. Das auf S. 187 angegebene Diagramm definiert keine Poincarésche Mannigfaltigkeit; denn es besitzt die Identität als Fundamentalgruppe, wie man leicht nachrechnet, und ist, wie man weiterhin sieht, ein Diagramm der Sphäre [5].

Prinzipiell größere Schwierigkeiten bieten schon die Diagramme mit $p = 2$. Hier gibt es unendlich viele Paare von Flächen, welche die Brezel in eine Zelle zerschneiden. Ist f ein solches Flächenstck und schneiden wir die in den euklidischen Raum fest eingebettete Brezel längs f auf, so kann es sein, daß ein verknoteter Ring entsteht. Beispielsweise kann so die Kleeblattschlinge entstehen (Fig, 2). Allgemein entstehen Knoten, deren Gruppe sich durch zwei Erzeugende und eine Relation definieren läßt. In diesen Möglichkeiten liegt offenbar der tiefere Grund, warum die HeegaardDiagramme der Sphäre mit $p = 2$ bereits so kompliziert werden können. Andererseits bietet die nähere Untersuchung der hier auftretenden Verknotungen einen Ansatzpunkt, um diese Diagramme näher kennenzulernen. Verwandelt man das Heegaard-Diagramm in eine Zellzerlegung aus einem Punkt, einer dreidimensionalen Zelle und zwei ein- sowie zwei zweidimensionalen Zellen, so können die beiden eindimensionalen Zellen je für sich verknotet sein. Es ist also i. allg. nicht möglich, in die Strecken eines solchen Schemas einfache Flächenstücke einzuspannen. Nimmt man hingegen beide eindimensionalen Zellen gleichzeitig’ aus der Sphäre heraus, so entsteht ein Auenraum mit der freien Gruppe von zwei Erzeugenden als Fundamentalgruppe. Auch ein solches Zellschema ist wesentlich durch die Yerknotungsoigenschaften der darin auftretenden Strecken charakterisiert. Um zu entscheiden, ob ein Heegaard-Diagramm vom Geschlecht $p = 2$ die Sphäre darstellt, hat man nach Poincare [2] zu untersuchen, ob es ein Paar von nach innen und ein Paar von nach außen zusammenziehbaren Kurven gibt, die insgesamt ein kanonisches Schnittsystem von $\mathfrak{R}$ bilden. Eine andere Formulierung derselben Aufgabe lautet so: Kann man die Vollbrezel V_1 des Diagramms so auf die Kugel mit zwei Henkeln abbilden, daß die nach außen zusammenziehbaren Kurven des Diagramms auch im euklidischen Raum nach außen zusammenziehbar werden? Nach Poincare [2] bieten die Diagramme ferner eine Möglichkeit, Mannigfaltigkeiten mit der Identität als Fundamentalgruppe zu untersuchen. Alle diese Fragen hängen aufs engste mit der Automorphismengruppe der Wegegruppe einer Fläche vom Geschlecht 2 zusammen, deren Kenntnis neuerdings in Ergnzung"des Ansatzes von Dehn und Baer [3] von Goeritz [4] merklich gefördert worden ist. Der Anlaß zu diesen neuen Untersuchungen lag gerade in dem hier dargestellten Zusammenhang mit den Heegaard -Diagrarnmen.

Literatur

[1] H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Sächs. Akad. d. W., Leipzig 1931, Bd. 83, S. 26, insbesondere S. 44 und 57. L. Goeritz, Hamb. Abhandl. 1932, Die Heegard-Diagramme des Torus.

[2] H, Poincare, V. Compl. à l'analysis situs, Rendic. d. Palermo, 1904, Bd.18, S.45, insbesondere S. 110. Wir heben hervor, daß damit zugleich behauptet ist, daß alle Flächen $\mathfrak{R}$ vom Geschlecht $p = 2$ der Spähre ineinander deformierbar sind.

[3] R. Baer, Abbildungstypengruppe d. 01'. geschl. Flche v. Geschl. 2, Crelles J ourn., 1928, Bd. 160, S. 1.

[4] L. Goeritz, Die Abbildungen der Brezelflche u. d. Vollbrezel v. Gesehl. 2, Hamb. Abhandl. 1933.

[5] Anmerkung bei der Korrektur. Herr Dehn macht mich auf seine Berichtigung in den Jahresber. d. D. M. V. (l907), Bd. 16, S.573, aufmerksam; in derselben wird die angeführte Stelle der Enzyklopdie mit einer anderen Tatsache in Widerspruch gesetzt, die einfacher und spezieller als die von mir herangezogene ist.

Zugleich sei hier auf die inzwischen erschienene Arbeit von J. Singer, "Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams", Transact. of the Amer. Math. Soc. 1933, Bd. 35, S. 88 verwiesen, die eine vllig durchgefhrte 'I'heorie der Äquivalenz von Heegaard-Diagrammen entwickelt.