# Le problème de la réalité de cycles lents et le « syndrome de Joseph »

*Benoît Mandelbrot*

I.B.M. Thomas J. Watson Research Centre
Yorktown Heights, New York

Dans cette leçon [1], je me propose de discuter le rôle du très long terme, d'une part, dans le comportement des chroniques économiques — sans me concentrer d'aucune façon sur le problème des prix — et d'autre part, dans celui de nombre de chroniques physiques. Ces dernières ont un intérêt double, d'une part, dû à leur importance intrinsèque, d'autre part, à leur effet direct sur l'économie. Par exemple, dans le cas des matières premières agricoles, les quantités produites et par suite les prix dépendent directement de la météorologie, et en particulier de la précipitation enregistrée au cours de la saison de croissance. Cette relation est tellement évidente qu'on la voit déjà citée dans la Bible dans l'épisode des vaches grasses et des vaches maigres, y compris l'intervention du gouvernement du pharaon (dirigé par Joseph, fils de Jacob), dans le but de régulariser les fluctations. Il résulte de cette relation causale qu'il est raisonnable que les variations des prix et des décharges du Nil se ressemblent et qu'on doit conduire en parallèle les efforts pour d'une part les décrire et d'autre part pour les contrôler et les régulariser.

## Esquisse des problèmes du controle et de la description

En ce qui concerne le contrôle, on a conçu dans le cas du Nil deux méthodes très différentes pour l'effectuer, respectivement à court et à long terme, le bas et le haut barrages d'Assouan. De plus, il est universellement admis que le contrôle à court terme s'était avéré insuffisant, et on est en train de découvrir que le contrôle à long terme est plein d'embûches imprévues. En économique, les choses sont plus complexes.

[1] Ce texte développe une leçon faite au Collège de France le 22 janvier 1973, sur l'invitation du professeur François Perroux.

On me dit que certaines doctrines nient l'importance du long terme, tandis que d'autres la reconnaissent (je ne suis pas qualifié pour discuter des doctrines en détail). De plus, le contrôle ne s'exerce pas à travers un seul barrage, mais à plusieurs niveaux qui peuvent être relativement indépendants et même agir en sens inverses. Par exemple, nous avons souligné dans la leçon précédente (Mandelbrot 1973d) que, s'il anticipe rationnellement du point de vue de l'intérêt de ses membres, un marché spéculatif est automatiquement conduit à introduire des discontinuités dans les prix, ainsi que d'autres conséquences que la puissance publique peut vouloir contrecarrer comme « déstabilisantes ». Des difficultés analogues risquent de se retrouver, lorsque, au lieu des discontinuités (qui sont instantanées donc constituent un phénomène à court terme), on considère les effets à long terme. Donc l'existence et (si ils existent) l'importance de ces effets mérite de retenir l'attention.

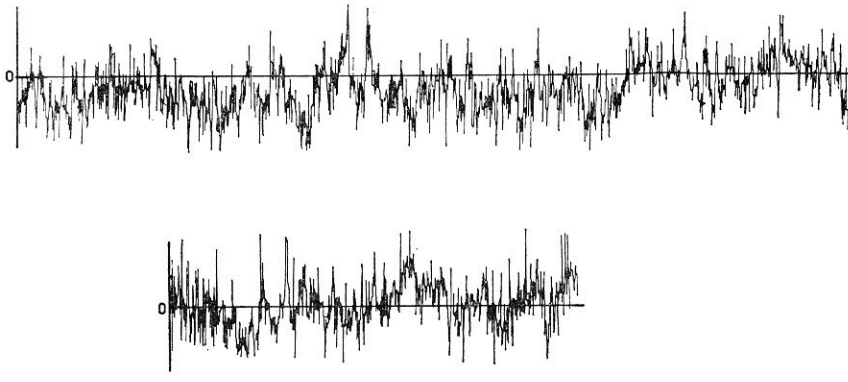
Pour contrôler au mieux, il faut tout d'abord avoir une bonne description, ce à quoi nous allons nous attacher dans le contexte du long terme. Nous nous efforcerons d'être résolument pragmatique, collant aux faits aussi près que possible. Nous nous contenterons pour l'instant de ce que le jargon des physiciens appelle une « phénoménologie », c'est-à-dire une description qui couvre maints faits au moyen d'un modèle mathématique cohérent. L'explication de ce modèle au moyen de causes premières est remise à plus tard, parce qu'elle est certainement difficile. Traditionnellement, la majorité des économistes ont recherché une explication purement économique — tout en s'inspirant (quelquefois jusqu'à l'absurde) des structures mathématiques de la théorie des fluctuations thermodynamiques. De même, la majorité des hydrologues cherchait une explication purement climatique, avec dans les deux cas quelques fidèles des taches solaires. Aujourd'hui, l'économiste peut commencer à entrevoir la possibilité de séparer ce qui est dû aux mécanismes économiques de ce qui est dû aux faits physiques qui ont sur l'économique une influence réelle. Mais tout cela est difficile, et il vaut mieux commencer par décrire.

## Le problème de la multiplicité des cycles différents et l'analyse spectrale

Entre chroniques économiques et Nilotes, la première ressemblance consiste dans le comportement cyclique non périodique qui les caractérise toutes deux. La discussion qui suit va donc en premier lieu

concerner ce qu'on a appelé le problème de la réalité des cycles en général et des cycles longs en particulier. Dans les phénomènes cycliques, le plus frappant c'est l'abondance même de cycles différents et la fragilité des critères qui les définissent ou les différencient; voir figure 1. Prenons par exemple une chronique couvrant un siècle année par année, de façon qu'il n'y ait pas de saisonnier annuel. Nous y verrons à un bout des cycles courts dont la durée est de, mettons, 5 à 10 ans; à l'autre bout des cycles longs dont la durée se compte en décades. Ce qui à l'horizon proche paraissait une tendance à la croissance, (« trend »), se révèle être en réalité le début d'un cycle qui finit bientôt par changer de direction. Dans la même chronique, certains

FIGURE 1. — *Deux chroniques caractérisées par une multiplicité extrême de cycles non périodiques*




Je ne suis pas certain de la nature de ces courbes, les cartes d'après lesquelles elles ont été tracées ayant été égarées. Je sais seulement qu'elles sont d'origines différentes, correspondant à deux des possibilités suivantes:

*a)* chronique empirique des décharges d'une rivière;

*b)* simulation sur ordinateur d'un bruit gaussien fractionnaire; ou

*c)* chronique économique.

Cette incertitude se trouve souligner très commodément la ressemblance frappante existant entre les trois possibilités en question. L'importance des éléments de basse fréquence (dépendance à long terme) se manifeste dans tous les cas par une richesse étonnante de « configurations » de toute sorte. Ces fonctions montent et descendent, tantôt irrégulièrement, tantôt de façon suggérant des périodicités cachées. En particulier, le nombre des « cycles lents » dans chacune des deux courbes est à peu près le même. En d'autres termes, il semblerait que la longueur d'onde des cycles les plus lents soit, en gros, proportionnelle à la longueur de l'échantillon, disons de 10 ans sur un échantillon de 30 ans, de 100 ans sur un échantillon de 300 ans, etc. Quant au mécanisme générateur, on le connaît bien dans le cas du bruit fractionnaire; on sait qu'il n'implique aucun « cycle vrai »; ceux que l'on voit si clairement sont donc des « artefacts ». Donc dans le cas de chroniques réelles il se peut, faute de preuve du contraire, qu'il en soit de même.

verront, en plus, des cycles moyens, tout en ayant de la peine à distinguer entre des cycles moyens un peu courts et des cycles courts un peu longs, ou entre des cycles moyens un peu longs et des cycles longs un peu courts. Dans certains cas priviligiés, les données sont même beaucoup plus abondantes. En économique, on a l'exemple des chroniques boursières de jour en jour. En hydrologie-climatologie, les exemples de la chronique du Nil, de la chronique du climat de l'Arizona (connu par les épaisseurs des anneaux des pins « bristlecone », dont la longévité est extraordinaire) et des chroniques de certaines régions du Canada et de la Suède (connues par les épaisseurs des varves, couches de boue séchée au fond des lacs fossiles). Quand on dispose ainsi de plusieurs centaines ou même milliers de données, on découvre des cycles toujours plus longs, séculaires ou millénaires.

Nous arrivons maintenant à une distinction vitale. Tout ce que nous avons dit de la multiplicité des cycles différents s'applique textuellement aux trajectoires de promenade aléatoire dont un exemple (dû à Feller) est reproduit dans Mandelbrot (1973d). Donc une source possible de caractère cyclique non périodique se trouve simplement dans l'accumulation de changements imprévisibles et purement aléatoires. Le mérite d'avoir découvert cette possibilité revient sans doute à Holbrook Working (1934b) [1]. Cependant, cela est loin d'expliquer tous les cas intéressants de comportement cyclique. En effet, une promenade aléatoire finit toujours par s'éloigner à l'infini, dans un sens ou l'autre, mais tel n'est pas nécessairement le cas des chroniques dont nous nous occupons. Maintes d'entre elles paraissent stationnaires, ce mot étant ici pris dans un sens spécial signifiant qu'elles montent et descendent, mais leur variation ne sort pas d'une marge relativement étroite. Par exemple, Working introduisit la promenade aléatoire comme modèle d'une chronique de prix, tandis que ce qui nous intéresse c'est de modeler une chronique de variations de prix. Pour celles-ci, on a le choix entre diverses attitudes conceptuelles.

A l'un des extrêmes se trouvent ceux qui espèrent que derrière l'irrégularité que l'on observe se cache un petit nombre de mécanismes, à chacun desquels correspondrait une période bien définie ou peut-être une sorte de période approximative qu'on appelle « constante de temps »; les diverses périodes seraient de plus suffisamment distinctes

[1] La promenade aléatoire avait été considérée bien plus tôt par Bachelier — voyez Mandelbrot (1973d) — mais ce n'était pas au problème des cycles qu'il s'intéressait. Il n'est même pas clair qu'il ait pu se livrer à des « simulations » qui auraient montré le caractère cyclique de son modèle.

pour qu'on puisse espérer les identifier et les séparer. Cet espoir a été vers 1900-1920 à la base de la technique dite du « périodogramme ». A chaque période de la chronique devrait correspondre une raie de périodogramme, et réciproquement. Appliqué par William Beveridge aux variations du cours du blé en Angleterre, le périodogramme sembla d'abord révéler des cycles très clairs. Mais bientôt le nombre de cycles différents parut suspect, et finalement on s'aperçut que la technique statistique de Beveridge était incorrecte. Profondément transformée par les ingénieurs électroniciens, elle finit par donner le jour à ce qu'on appelle « analyse spectrale », qui revint bientôt à la connaissance des économistes et fut appliquée à leurs chroniques. Le résultat a été en général très décevant, ainsi d'ailleurs qu'en hydrologie. Aucune périodicité ne semble statistiquement significative.

Cela encourage à envisager l'autre attitude extrême à l'égard des mécanismes économiques, admettant que leur nombre est très élevé et que leurs constantes de temps sont près de se chevaucher et impossibles à séparer. On dit qu'elles ne forment pas un « spectre de raies », mais plutôt un « spectre continu ». A ce stade, revenons un petit peu en arrière, pour reconsidérer l'origine du caractère cyclique de la promenade aléatoire. Il se trouve que le concept du spectre peut être défini de façon à s'y appliquer, et on constate, d'une part qu'il est lui aussi continu, et d'autre part que sa densité augmente sans cesse lorsque l'on passe des hautes aux basses fréquences, c'est-à-dire des petites aux grandes longueurs d'onde. En d'autres termes, ce spectre manifeste, à la place des multiples raies fines qu'attendait Beveridge, une sorte de raie unique, mais grosse et très floue, aux environs de l'origine des fréquences. La conséquence en est ce que nous avons vu: la présence de multiples périodicités. Mais celles-ci ne sont, pour utiliser le terme d'Adelman (1965), que des « artefacts ». Plus précisément, ils ne sont pas uniquement une caractéristique du processus, mais plutôt le fruit conjoint du processus, de la longueur de l'échantillon et du jugement de l'économiste ou de l'hydrologue. Le premier élément est extérieur à l'observateur, le second peut (selon les cas) être imposé ou être choisi à volonté, et le troisième est dans tous les cas subjectif, c'est-à-dire affaire de perception humaine et sujet à désaccords. (Cependant, ces derniers ne portent souvent que sur des détails. C'est là, d'ailleurs, un fait intéressant du point de vue de la théorie de la perception).

Quittons maintenant la promenade aléatoire, qui (encore une fois) est non stationnaire, pour revenir à des processus stationnaires. On peut conjecturer ceci: si leur spectre se trouve lui aussi manifester une

grosse raie floue vers l'origine des fréquences, on pourra s'attendre à ce qu'ils ressemblent à la promenade aléatoire, sauf que leur caractère cyclique non périodique devrait être moins accentué. Qu'une telle raie existe a bien été confirmé, au moins qualitativement, par les recherches de Adelman (1965) et de Granger (1966). L'étape suivante, allant au-delà du quantitatif, consisterait à déterminer la forme précise de la densité spectrale. Cela a été possible dans quelques branches de la physique, qui ne nous concernent pas ici, dans lesquelles les données se comptent en milliards. Mais dans le cas d'échantillons de taille moins écrasante, interpréter l'analyse spectrale des basses fréquences s'est trouvé être très difficile, voire impossible. D'autres techniques plus sensibles sont souhaitables et nous allons maintenant en décrire une.

Pour simplifier la structure de ce travail, nous allons tirer le rideau sur les considérations spectrales qui précèdent et repartir au commencement.

## Le phénomène de Hurst

Harold Edwin Hurst est un physicien anglais devenu grand nilologue (et méritant ainsi le surnom de Abu Nil, le père du Nil). La science lui est redevable d'une invention statistique et d'une découverte empirique remarquables, qui se trouvent permettre de mesurer l'intensité de la propensité qu'a une chronique à être cyclique mais non périodique, comportement qui constitue un aspect de la dépendance statistique à long terme [1].

L'invention statistique de Hurst consiste en une expression que nous appellerons R (t, d)/S (t, d), où t est appelé point de départ et d est appelé délai. La définition de R/S est décrite dans la légende de la figure 2. Au moyen de R/S, T valeurs d'une fonction X (t) se transforment en un diagramme formé de plusieurs lignes, chacune correspondant à un t fixe et à des valeurs croissantes de d. D'abord, à titre d'exemple et de point de comparaison, examinons la figure 3, qui donne la transformée R/S dans un cas où les valeurs de la fonction X (t) sont indépendantes, stationnaires et gaussiennes. Nous voyons que ce diagramme se compose de courbes s'entrelaçant étroitement et se plaçant le long d'une droite de pente 0,5. Donc R/S croît comme $d^{0,5}$.

La découverte empirique de Hurst est que dans la nature il est fréquent qu'il n'en soit pas du tout ainsi. La réalité, sous la forme où

[1] Cette section emprunte beaucoup à une section portant le même titre dans un travail dont j'ai été un des coauteurs; cf. Mandelbrot et Wallis (1969).

FIGURE 2. — *Définitions des fonctions R, S et Q*

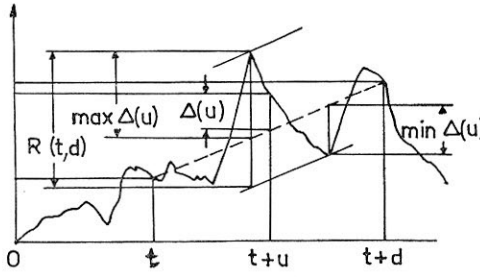
Cette figure se compose d'un graphique suivi de formules.

$$\Delta(u) = X^*(t+u) - X^*(t) - \frac{u}{d}\left[X^*(t+d) - X^*(t)\right]$$

$$R(t,d) = \max_{0 \leq u \leq d} \Delta(u) - \min_{0 \leq u \leq d} \Delta(u)$$

$$S^2(t,d) = d^{-1}\sum X^2(t+u) - \left[d^{-1}\sum X(t+u)\right]^2$$

$$Q(t,d) = \frac{R(t,d)}{S(t,d)}$$




Le graphique indique comment on définit R(t, d). Désignons par X(t) la fonction pour laquelle on étudie l'intensité de la dépendance à long terme. La courbe continue tracée ci-dessus représente alors $X^*(t) = \sum_{s=1}^{t} X(s)$. Par exemple, si les X(t) sont des changements de prix, X* est simplement le prix lui-même. Etant donné que les données empiriques sont toujours fournies en temps continu, on aurait dû tracer X* comme une suite de points, mais pour plus de clarté on l'a tracé comme une ligne. La fonction Δ (u) est une interpolation linéaire de X* entre t et t + d.

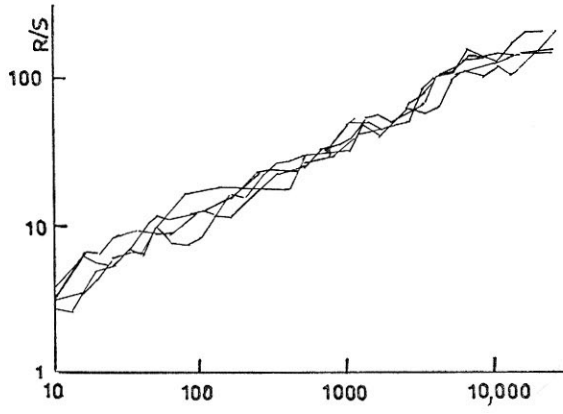
Dans la motivation hydrologique de Hurst, X(t) est la décharge d'une rivière au cours de l'année t. Dans ce cas, R(t, d) = max Δ (u) − min Δ (u) est le volume d'un barrage grâce auquel, au cours de la période de t à t + d, la rivière aurait été parfaitement régularisée: la décharge à la sortie aurait été constante, le barrage aurait fini aussi plein qu'il avait commencé et cependant n'aurait jamais ni débordé ni asséché. En économique, il n'y a pas d'interprétation aussi simple, mais R peut être considéré comme une version améliorée de la différence entre les cours maximum et minimum.

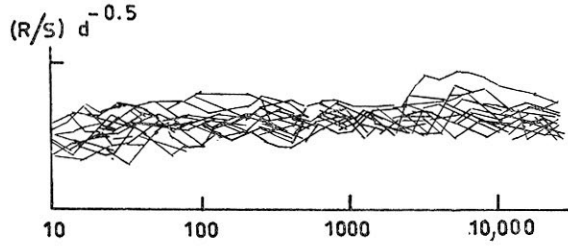
La première des formules ci-dessus répète simplement la définition de R, la deuxième donnant celle du carré du dénominateur S. Notons que R aussi bien que $S^2$ se rapportent à des moyennes empiriques entre t et t + d. De plus, tandis que R est un « range » de variables *cumulées* X*, $S^2$ est une variance de variables *non cumulées* X. Cela est très important. En effet, R combine des propriétés de X à long et court termes, tandis que S n'inclut que des propriétés à court terme; il se trouve que, sous des hypothèses très larges, diviser R par S suffit précisément pour obtenir un résultat ne contenant que des propriétés à long terme.

elle apparaît après diverses corrections (introduites par Mandelbrot et Wallis (1969), qui insistèrent sur l'hydrologie, et Mandelbrot (inédit), qui a insisté sur l'économie) est la suivante: les diagrammes relatifs aux

FIGURE 3. — *Comportement de Q dans le cas gaussien indépendant*

Cette figure se compose de deux graphiques.




Sur le premier, on a tracé en abscisse le logarithme du délai d, et en ordonnée celui de la valeur de $Q = R/S$. Chacune des courbes correspond à quatre échantillons artificiels de 30 000 valeurs d'une fonction pseudo-aléatoire gaussienne indépendante, engendrés sur ordinateur. Comme la théorie le prédit, ces courbes s'entrelacent de près autour d'une droite de pente 0,5.

Sur le deuxième graphique, Q est d'abord divisé par $d^{0,5}$, de façon à compenser exactement la pente ci-dessus, et à obtenir des courbes dont la tendance moyenne est horizontale.

Les graphiques empiriques sont légèrement différents, car au lieu d'échantillons distincts on dispose de portions successives d'un même échantillon, construites avec des points de départ t distribués uniformément. De ce fait, les courbes correspondantes ont des longueurs différentes et ne sont pas indépendantes. Cependant les graphiques ont à peu près la même allure que ci-dessus.

Le phénomène de Hurst, exprimé dans la représentation du premier graphique ci-dessus, consiste à observer que les diverses courbes se placent tout près d'une droite dont la pente H dépasse souvent 0,5 de façon incontestable, la différence étant si claire qu'il est impossible de l'attribuer simplement à une fluctation statistique.

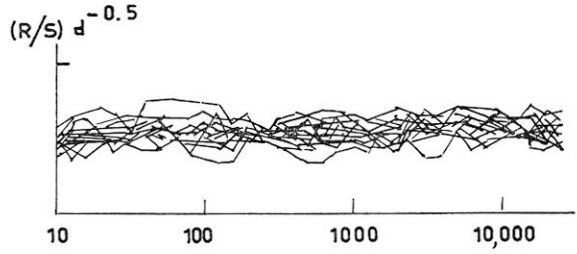
chroniques empiriques se composent bien en général de courbes s'enlaçant étroitement le long d'une droite, signifiant que Q (t, d) croît comme $d^H$, mais la pente H de cette droite varie d'un cas à l'autre. Tantôt elle égale bien 0,5 (à de petites différences près, sans doute dues au hasard), mais tantôt elle en diffère nettement, prenant des valeurs telles que 0,7 et même 0,85. Les cas où $H > 0{,}5$ excluent l'hypothèse que les X sont gaussiens et indépendants. Deux questions se posent donc: d'abord qu'est-ce qui explique $H > 0{,}5$; ensuite que signifient en pratique les différences observées entre les divers H.

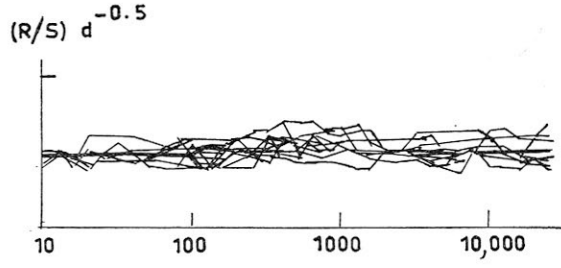
La portée de cette découverte a été reconnue très rapidement. Feller (1951) en dit ceci: « Nous sommes ici confrontés à un problème qui est intéressant des deux points de vue, statistique et mathématique ». Citons aussi Lloyd (1967): « Nous nous trouvons ainsi dans une de ces situations, si salutaires aux théoriciens, où des découvertes empiriques s'entêtent à ne pas se conformer à la théorie. Toutes les recherches décrites (dans l'article cité) suggèrent qu'à long terme R (t, d) devrait croître comme $d^{0,5}$, tandis qu'Hurst a extraordinairement bien documenté la découverte empirique que R (t,d) croît comme $d^H$, avec H pas loin de 0,7. Nous sommes donc forcés de conclure ou bien que l'interprétation que les théoriciens donnent de leur propre travail est incorrecte, ou que leurs théories ont une base fausse; il se peut que ces conclusions s'appliquent toutes deux. »

Passons maintenant en revue ces diverses explications du phénomène de Hurst: *a)* « il est sans doute dû à la distribution marginale de X (t) », *b)* « il est sans doute caractéristique d'une zone transitoire », ou *c)* « il est sans doute dû à une structure de corrélations très bizarre ».

Comme test de la première explication, choisissons des processus extrêmement non gaussiens mais à valeurs indépendantes, et construisons les diagrammes de Q (t, d) correspondants; figure 4. Le résultat est incontestablement négatif: même si la distribution du processus suit la distribution de Cauchy — dont les queues sont notoirement « épaisses » — ou une distribution lognormale — dont l'asymétrie est très grande — la quantité Q (t, d) continue de varier comme $d^{0,5}$. De toute évidence, la première explication ne tient pas. Il faut signaler à ce point que R (t, d) lui-même se comporte différemment suivant les distributions, et que c'est la division par S (t, d) qui libère le comportement de Q (t, d) de toute dépendance par rapport à la distribution marginale. A cet égard, soulignons que dans les propos cités ci-dessus, aussi bien Feller que Lloyd se réfèrent à R (t, d) et non à Q (t, d). C'est qu'ils avaient été mal informés de la découverte de Hurst, ou

FIGURE 4. — *Comportement de Q dans deux cas indépendants mais non gaussiens*




Ces deux graphiques sont construits suivant le même principe que le deuxième graphique de la figure précédente, les X étant encore indépendants. La différence est qu'ils suivent respectivement la distribution lognormale $10^G$ — où G est une variable gaussienne réduite — et une distribution de Cauchy. Ces distributions sont toutes les deux extraordinairement non gaussiennes. Cependant, les courbes ont la même tendance moyenne horizontale que dans le cas gaussien. Cela suffit à établir que le phénomène de Hurst ne saurait être expliqué comme conséquence de la distribution de X.

l'avaient mal lu [1]. Erreur grave de conséquences, sauf dans le cas où X est gaussien. Par exemple, Moran (qui, comme nous verrons, a attaqué ce problème de plusieurs façons différentes) a en particulier noté que, lorsque X est stable au sens de Levy (voir Mandelbrot, 1973b), son exposant étant $\alpha < 2$, alors Q tend à croître comme $d^H$ avec $H = 1/\alpha > 0{,}5$. Il est clair cependant que cette propriété de R ne

[1] De telles erreurs de communication entre expérimentateurs et mathématiciens ne sont malheureusement que trop fréquentes. Certaines conduisent à des mathématiques pures intéressantes en soi, mais la plupart n'ont conduit qu'à des mathématiques soi-disant appliquées, d'une stérilité totale. Dans le cas de FELLER, je crois savoir que les choses se sont passées comme suit : un émissaire de HURST vint le voir pour demander conseil ; craignant à bon escient de ne pouvoir retenir l'attention du grand homme par une histoire trop compliquée, il lui en présenta une simplifiée, qu'il pensait être une bonne première approximation, mais qui en fait se révela source de confusion.

s'applique en aucune façon au phénomène de Hurst, puisque ce dernier est relatif à R/S [1]. Nous pouvons aller plus loin. Dans l'exemple de Moran, le fait de « croître comme $d^H$ » s'applique seulement à une croissance typique. La croissance réelle est sujette à fluctuations, et celles-ci se trouvent être énormes. Donc on doit s'attendre à ce que les observations soient tellement irrégulières qu'il eût été difficilement concevable qu'on songe à tirer de leur comportement une loi quelconque.

La deuxième explication, qui invoque des phénomènes transitoires, se réfère souvent au fait suivant : si X est une fonction aléatoire markovienne dont la corrélation C (d) est positive pour tout d, on trouve que le diagramme de Hurst est plus compliqué que lorsque X est indépendant ; il finit bien par une zone de pente 0,5, mais il commence par une zone transitoire où sa pente est supérieure. Si la corrélation est faible, le transitoire est bref, mais en prenant une corrélation forte on peut rendre le transitoire aussi long que l'on désire. L'explication par le transitoire continue en conjecturant que, si on disposait de chroniques plus longues, on pourrait continuer le diagramme de Hurst, et on verrait ce diagramme s'infléchir et prendre la pente finale de 0,5. Le fait qu'il commence par une zone de pente 0,7 n'aurait (dans cette optique) aucune signification profonde. Cet argument présente, toutefois, deux défauts. D'une part, la corrélation correspondant à d = 1 peut être mesurée directement, et les valeurs qu'on trouve sont beaucoup trop faibles pour expliquer le transitoire. D'autre part, s'il ne s'agissait jamais que de transitoires, on devrait connaître des exemples où on en voit la fin, suivie d'une pente finale de 0,5. Or, on n'en connaît aucun exemple. D'après les données de De Geer, le transitoire relatif aux épaisseurs des varves datant du Pléistocène a duré au moins six mille ans. D'après les données de Schulman, le transitoire relatif aux épaisseurs des anneaux d'arbre en Arizona a duré au moins deux mille ans. D'après les données du prince Omar Toussoun, le transitoire relatif au Nil continue depuis au moins mille ans. Un provisoire si durable, et dont on ne peut déterminer vers quoi il tend, ne mérite guère d'être traité de transitoire !

Nous venons de parler de transitoires dus à une dépendance markovienne. Un transitoire peut également être dû à la distribution de X. C'est un tel mélange des première et deuxième explications de Hurst —

[1] On peut faire à MORAN le compliment de constater que par ce modèle il paraît avoir senti que le phénomène de HURST était une manifestation d'homothétie interne — comme nous le verrons bientôt. Mais l'homothétie qu'il a postulé n'était pas la bonne.

combiné avec la faute de lecture consistant à remplacer R/S par R — que l'on trouve dans une autre œuvre de Moran. Ici l'auteur suppose que X suit une distribution gamma de très grande asymétrie et montre que le R résultant croît d'abord comme d puis asymptotiquement comme $d^{0,5}$. Ce modèle, cependant, n'a aucun rapport avec le problème de Hurst, puisque ce dernier concerne R/S.

Nous en arrivons à la troisième explication. Reprenons la citation de Llyod (1967) : « Hurst a avancé l'idée que son phénomène est dû à la structure de corrélation des chroniques en question. » Il aurait pu dire, aussi bien, à la « structure spectrale », ce qui nous ramène au paragraphe précédent de cet article. A une idée analogue, G. A. Barnard avait répliqué qu'aucune fonction de corrélation simple ne saurait réussir. Quant à Moran, il a affirmé que $H > 0,5$ ne saurait tenir, à moins que la corrélation ne prenne une forme « très bizarre et peu plausible » — forme qu'il n'a d'ailleurs pas précisé. J'ai cependant réussi à rendre justice à Hurst en construisant une classe de processus gaussiens que j'ai baptisés « bruits fractionnaires », et qui conduisent à R/S croissant comme $d^H$, avec H arbitraire entre 0 et 1. S'il est vrai que les corrélations de ces processus ne sont pas « simples », comme l'avait prévu Barnard, ce n'est pas une raison de les rejeter, bien au contraire. Que le bizarre empirique appelle un bizarre mathématique serait plutôt naturel !

## Homothétie interne et bruits gaussiens fractionnaires

Pour motiver les bruits fractionnaires, n'oublions pas que nous nous plaçons dans le cas gaussien où S est essentiellement une constante sans importance. Pensons à X (t) comme la décharge d'une rivière où le changement d'un prix, au cours d'une unité de temps, et supposons que $R(t, d) = Kd^H$ lorsque cette unité est d'un jour. Il est facile de voir alors que lorsque l'unité de temps est multipliée par r, on a affaire à une nouvelle fonction dont chaque valeur est la somme de r valeurs de la précédente, en d'autres termes, par une fonction $X_2(t)$ définie comme suit :

$$X_2(1) = \sum_{s=1}^{r} X(s), \quad X_2(2) = \sum_{s=r+1}^{2r} X(s)$$

$$\text{et généralement } X_2(k) = \sum_{s=(k-1)r+1}^{kr} X(s)$$

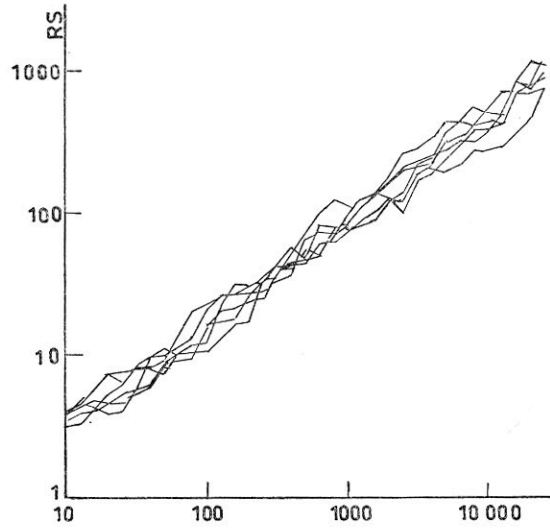
De plus, l'examen de la figure 2 montre alors que R est remplacé par $R_2(t, d) = Kd^H r^H$. En d'autres termes, le phénomène de Hurst consiste ici à affirmer qu'un changement d'unité de temps a exactement le même effet qu'une multiplication de X par le facteur $r^H$. A ce stade, la démarche doit être devenue reconnaissable par quiconque a suivi la leçon précédente (Mandelbrot 1973d). Elle nous amène à conclure que $X^*(t)$, défini comme $\sum_{s=1}^{t} X(s)$, possède une propriété d'invariance désignée comme « affinité statistique interne ».

L'exploration du phénomène de Hurst se ramène ainsi, tout d'abord, à identifier les processus gaussiens $X^*$ possédant une affinité statistique interne. Ils avaient été considérés par plusieurs mathématiciens, mais uniquement en passant (contrairement aux processus stables, Mandelbrot (1973d)), et par suite n'avaient même pas reçu de nom. J'ai proposé de les appeler « mouvements browniens fractionnaires ». Ensuite, on doit former les processus X conduisant à de tels $X^*$. Je les ai appelés « bruits gaussiens fractionnaires ». Ce sont des processus stationnaires. En dehors de l'espérance et de la variance, ils possèdent un seul paramètre, qui est précisément H et qu'il est donc aisé d'ajuster aux valeurs estimées sur les graphiques du R/S. H peut varier de 0 à 1, le domaine le plus intéressant allant de 0,5 à 1. Le point $H = 0{,}5$ correspond au bruit blanc. Un exemple de leur comportement est montré sur la figure 5.

## Signification des différents H: dépendance a long terme et tendance a un comportement cyclique

La propriété la plus frappante des bruits fractionnaires se rapporte à la dépendance entre passé et avenir. L'intuition habituelle que l'on a des processus stationnaires suggère que le futur et un passé suffisamment éloignés doivent devenir asymptotiquement indépendants. Il en est bien ainsi du bruit blanc. Mais dans le cas des bruits fractionnaires avec $H \neq 0{,}5$, la corrélation entre la moyenne des T dernières valeurs passées et celle de T prochaines valeurs se trouve rester positive! (En fait, reste indépendante de T.) Plus H s'éloigne de 0,5, plus cette corrélation augmente. Elle s'approche même de 1 lorsque H s'approche de 1. Le cas $H = 1 - \varepsilon$ correspond à un processus qui est à l'extrême limite du stationnaire, qu'on peut considérer comme à

FIGURE 5. — *Comportement de Q dans le cas d'un bruit gaussien fractionnaire*




Le graphique ci-dessus ressemble énormément à maints graphiques empiriques, pour lesquels la tendance des courbes de Q est encore rectiligne mais de pente $H > 0,5$. Ici, la pente H est égale à 0,7. Pourtant, il ne s'agit pas d'une chronique empirique, mais du fruit de la simulation sur ordinateur d'un bruit gaussien fractionnaire d'exposant choisi pour donner précisément la pente voulue. Cela suffit à établir que le phénomène de Hurst est parfaitement compatible avec le caractère gaussien du processus, et peut être expliqué comme étant causé par la forme spéciale de sa fonction de corrélation.

mi-chemin entre le bruit blanc, qui est totalement exempt de dépendance, et le mouvement brownien, pour lequel la dépendance est très forte mais purement cumulative, et qui est non stationnaire. Lorsque H croit de 0,5 à 1, la persistance du processus devient de plus en plus marquée. En termes pratiques, cela s'exprime par le fait, que les cycles de tout genre — qui, ne l'oublions pas, n'ont aucun caractère périodique — deviennent de plus en plus clairement distincts. En particulier, les cycles lents deviennent de plus en plus importants.

Revenons un instant à la corrélation non décroissante entre passé et avenir. Comportement bizarre, dirait-on, et même aberrant, mais qui se trouve être à la fois caractéristique et inévitable ; si on l'excluait, on ne connaîtrait aucun moyen de rendre compte du phénomène de Hurst, dont nous avons vu qu'il est caractéristique de tant de phénomènes naturels. Cette corrélation permanente entre les moyennes de X traduit le fait que la fonction de covariance de X décroît très lentement,

de telle façon que la série des covariances soit divergente. Dans la leçon précédente (Mandelbrot 1973b), nous avions de même vu que d'autres aspects du réel semblent exiger que la variance diverge, ce qui aussi paraissait aberrant.

## Valeurs de l'exposant H en hydrologie et économique

En hydrologie, H est presque sans exception supérieur à 0,5. Une des exceptions est le Rhin, qui se trouve être une rivière pauvre en histoires du type de celle de Joseph. Un des cas les plus extrêmes est le Nil. Les valeurs observées de H confirment assez bien l'intuition des géographes « littéraires »: les rivières réputées irrégulières (« non stationnaires ») — telles que la Loire — ayant des valeurs de H supérieures à celles des rivières « sans histoire ».

Parmi les chroniques économiques concernant des quantités autres que les prix, H prend également des valeurs très diverses, encore une fois conformes (dans les grandes lignes) à la classification de ces chroniques d'après les intensités respectives de leurs tendances à être cycliques. Les soubassements théoriques de cette classification sont à la fois complexes et imparfaits, donc nous n'en dirons rien.

Par contre, le comportement des changements de prix spéculatifs est très intéressant et relativement simple. La théorie économique dit que sur un marché spéculatif suffisamment actif pour être proche de la « perfection », ou tout au moins de l'« efficience », tout prix doit suivre un processus d'un type que les mathématiciens appellent une « martingale »; voire par exemple Mandelbrot (1966, 1971a). Cela est dû aux actions conjuguées des arbitragistes qui, par exemple, achètent et vendent à des termes différents. Dans ce cas, on doit s'attendre à ce que les changements de prix donnent $H = 0,5$. Tel est effectivement le cas pour certaines denrées, pour les actions de certaines très grosses sociétés et pour certains taux d'obligations. A l'autre extrémité se placent les prix pour lesquels aucun arbitrage n'est concevable. Un bon exemple est celui des taux d'intérêt payés par les arbitragistes (« call money » sur la place de New York), pour lesquels H est très élevé. Entre les deux se place toute une gamme de possibilités intermédiaires, qu'il serait fastidieux d'énumérer ici. Qu'il suffise de dire que la valeur de $H - 0,5$ constitue une mesure du degré d'imperfection d'un tel marché.

## Conclusion

Après cette longue excursion statistique, il est bon de revenir sur le problème dont nous sommes partis, celui de la « réalité des cycles ». Les résultats de l'analyse du R/S confirment et renforcent considérablement ceux de l'analyse spectrale: en règle générale, les cycles économiques s'éloignent tant de la périodicité, et dépendent tant de la longueur de l'échantillon disponible et des goûts de l'observateur, qu'il faut jusqu'à nouvel ordre les considérer comme des artefacts. Suivant les mots de J. M. Keynes (1940), leur valeur tient surtout à ce qu'ils offrent à l'histoire économique un cadre bien commode.

## RÉFÉRENCES ET BIBLIOGRAPHIE

*Nota :* Cette liste continue celle de l'article précédent. La disposition est la même: nom de l'auteur, date et, éventuellement, lettre distinctive. Ces dernières, le cas échéant, se suivent d'une bibliographie à l'autre, ce qui explique que certaines références ci-dessous commencent par la lettre d. Lorsqu'une référence du présent article manque dans la présente liste, se reporter à l'article précédent.

Adelman, I. (1965), « Long Cycles: Fact or Artefact? », *American Economic Review*, LV (juin 1965), pp. 444-463.

Barnard, G. A., « Discussion » suivant Hurst (1956), p. 552.

Feller, W. (1951), « The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables », *Annals of Mathematical Statistics*, XXII (1951), p. 427.

Fiering, M. (1967), *Streamflow Synthesis*, Harvard Unversity Press, Cambridge.

Geer, G. (1940), *Geochronologia Suedica Principles*, Almquist and Wiksells, Stockholm.

Granger, C. W. J. (1966), « The Typical Spectral Shape of An Economic Variable », *Econometrica*, XXXIV (janvier 1966), pp. 150-161.

Hurst, H. E. (1956), « Methods of using long-term storage in reservoirs », *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part I, p. 519.

Hurst, H. E., Black, R. P., and Simaika, T. M. (1965), *Long-Term Storage, an Experimental Study*, Constable, London.

Keynes, J. M. (1940), « On the Method of Statistical Business Research », *Economic Journal*, L (mars 1940), pp. 145-156.

Lloyd, E. H. (1967), « Stochastic reservoir theory », *Advances in Hydro-Science*, IV (1967), p. 281.

Mandelbrot, B. (1965), « Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique de H. E. Hurst », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, CCLX (22 mars 1965), pp. 3274-3277.

Mandelbrot, B. (1969), « Long-Run Linearity, Locally Gaussian Process, H-Spectra, and Infinite Variances », *International Economic Review*, X (février 1969), pp. 82-111.

Mandelbrot, B. (1970), « Statistical Dependence in Prices and Interest Rates », read at the Second World Congress of the Econometric Society (septembre 1970).

MANDELBROT, B. (1971*b*), « A Fast Fractional Gaussian Noise Generator », *Water Resources Research*, VII (juin 1971), pp. 543-553.

MANDELBROT, B. (1972*b*), « Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles: from the Variance to R/S Analysis », *Annals of Economic and Social Measurement*, I (juillet 1972), pp. 259-290.

MANDELBROT, B. (1973*d*), « Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix », *Economie appliquée* XXVI (1973), pp. 321-348.

MANDELBROT, B., and VAN NESS, J. W. (1968), « Fractional Brownian motions, fractional noises and applications », *SIAM Review*, X (octobre 1968), pp. 422-437.

MANDELBROT, B., and WALLIS, J. R. (1968), « Noah, Joseph and operational hydrology », *Water Resources Research*, IV (octobre 1968), pp. 909-918.

MANDELBROT, B., and WALLIS, J. R. (1969*a*), « Computer experiments with fractional Gaussian noises », *Water Resources Research*, V (février 1969), pp.228-267.

MANDELBROT, B., and WALLIS J. R. (1969*b*), « Some long run properties of geophysical records », *Water Resources Research*, V (avril 1969), pp. 321-340.

MANDELBROT, B., and WALLIS J. R. (1969*c*), « Robustness of the Rescaled Range and the Measurement of Long-Run Statistical Dependence », *Water Resources Research*, V (octobre 1969), pp. 967-988.

MANDELBROT, B., and WALLIS J. R. (1969*d*), « Operational Hydrology Using Self Similar Processes », in John LAWRENCE, ed., *Proceedings of the Fifth International Conference on Operations Research* (Venise, 1969), (London: Tavistock Press).

MORAN, P. A. P. (1959), *The Theory of Storage*, Wiley and Sons, New York, and Methuen, London.

MORAN, P. A. P. (1964), « On the range of cumulative sums », *Annals of the Institute of Statistical Mathematics (Tokyo)*, XVI (1964), p. 109.

SCHULMAN, E. (1956), *Dendroclimatic Changes in Semi-arid America*, Tucson, University of Arizona Press.

TOUSSOUN, O. (1925), « Mémoire sur l'histoire du Nil », *Mémoires de l'Institut d'Egypte, Le Caire*, VIII-X.

TAQQU, M. (1970), « Note on Evaluations of R/S for Fractional Noises and Geophysical Records », *Water Resources Research*, VI (1970), p. 349.

YOUNG, W. E. (1971), « Random walk of stock prices; a test of the variance-time function », *Econometrica*, XXXIX (septembre 1971), pp. 797-812.

WORKING, H. (1934*b*), « A Random- Difference Series for Use in the Analysis of Time Series », *Journal of the American Statistical Association*, XXIX (1934), pp. 11-24.