

Pour la Science : 234, Avril 1997, 10 - 12

L'application des fractales à la finance

Entretien avec M. **Benoît Mandelbrot**

LA RECHERCHE • Que sont les fractales?

BENOIT MANDELBROT • Les fractales sont des objets géométriques qui ont la propriété que voici: ils peuvent être décomposés en fragments dont chacun a la même forme que le tout. Dans le cas de la Bourse, l'objet géométrique est une de ces courbes très irrégulières qui donnent, par exemple, le prix d'une action en fonction du temps. Les journaux reproduisent ces courbes selon un format "paysage" de largeur et hauteur données. Mais supposez qu'on ne prenne en considération qu'une partie d'une telle courbe; Par exemple, au lieu de suivre un prix sur cinq ans, on peut décider de le suivre, mais avec une précision croissante, sur une année, quelques mois, voire quelques jours. La courbe partielle sera, elle aussi, imprimée selon le format "paysage." C'est là qu'interviennent les fractales. Une fractale auto-affine est un objet géométrique pour lequel les parties ainsi réduites suivent les mêmes règles que le tout. Que l'on considère un cours boursier sur une longue période, ou sur une courte période, les détails seront tout à fait différents, mais l'allure générale, les règles générales, seront très semblables.

R •• Comment la notion de fractale est-elle apparue et comment s'est-elle développée?

M •• La notion de fractale est apparue de manière très graduelle dans mon travail, mais l'examen des cours de bourse a été déterminant: c'est là que tout a commencé pour de bon. Au début des années 60, j'étais en route pour faire une

conférence aux économistes de Harvard. Au tableau du collègue qui m'avait invité, je vois un diagramme que j'allais moi-même utiliser pour illustrer ma conférence. Je pose des questions et apprends que le diagramme de mon collègue portait sur le prix du coton. Il démontrait que les grands changements successifs du prix du coton ne sont pas statistiquement indépendants. Or j'ai toujours pensé que, là où il existe une ressemblance géométrique, il doit y avoir une ressemblance plus profonde, et j'ai voulu mieux connaître ce problème. Mon collègue me fit savoir que, depuis des décennies, les économistes s'étaient plaints, d'une part, de l'insuffisance de données et, d'autre part, de la faiblesse de leurs outils statistiques. Aujourd'hui, ajouta-t-il, les données commencent à être abondantes, notamment pour les denrées agricoles et pour les métaux, et des outils statistiques de tout genre peuvent être testés aisément grâce aux ordinateurs. Aussi avait-il appliqué aux prix du coton les différentes techniques statistiques disponibles. Mais, de son propre aveu, ceci ne l'a mené nulle part. Je lui ai aussitôt demandé si je pouvais utiliser le matériau qu'il avait réuni. Je l'ai emmené au centre de recherche d'IBM où je travaillais, pour effectuer plusieurs tests. Mes tests étaient très différents des siens, car en parlant avec lui et avec d'autres, j'avais déjà conclu qu'une partie de la solution du problème résidait dans les notions de "auto-similarité" et de "auto-affinité" que j'allais dix ans plus tard utiliser pour définir les fractales.

Pour me simplifier la vie, je commençai par un détour. Bien que le point de départ de ma réflexion ait concerné la dépendance des prix, j'ai d'abord fait l'hypothèse que les différents changements de prix pouvaient être considérés comme indépendants les uns des autres. Indépendance d'une part, auto-affinité, d'autre part. Mathématicien, je savais qu'il n'y avait que deux solutions. L'une est le mouvement brownien, et l'idée que ce mouvement pourrait représenter les mouvements de

prix avait effectivement été avancée par une centaine de personnes. L'autre solution possible était quasiment inconnue; je décidai de la développer.

"Les réglementations des autorités de tutelle des marchés boursiers qui enjoignent aux professionnels d'assurer une continuité du marché et qui définissent les règles à respecter en cas de discontinuité montrent bien que la loi est consciente que la discontinuité est inhérente au fonctionnement des marchés.

R •• Comment s'est effectuée l'application des théories mathématiques à l'analyse des phénomènes de marchés?

M •• Ayant fait mes études en France, je connaissais bien le mouvement brownien mais sans l'accepter comme modèle des prix. D'après le mouvement brownien, les distributions des changements de prix sont gaussiennes. Or, un volumineux ouvrage de Macaulay avait démontré que cette hypothèse est très loin des réalités. Fait plus important, le mouvement brownien présente une faille qu'on peut appeler qualitative, mais qui est profonde: il présuppose la continuité. Or, il est évident que les prix ne varient pas de manière continue. Bien au contraire! N'importe quel livre d'histoire économique donne mille cas où une nouvelle concernant une entreprise fait passer le prix de son action instantanément de 100 à 300 ou de 100 à 10. Quant aux changements de 10%, même l'action d'une compagnie comme IBM n'en est pas exempte. Ainsi un processus qui postule la continuité était-il, selon moi, frappé d'un vice tout à fait fondamental que rien ne pouvait cacher!

D'ailleurs, les réglementations des autorités de tutelle des marchés boursiers enjoignent aux professionnels d'assurer la continuité du marché et définissent les règles à respecter en cas de discontinuité. Ceci montre bien que la loi est consciente que la discontinuité est inhérente au fonctionnement des marchés. J'ai donc

accepté l'idée que les prix pouvaient suivre un processus discontinu. Il se trouve qu'il existe des processus à la fois discontinus et auto-affines. L'idée sous-jacente remontait déjà à Cauchy, puis elle fut reprise et étudiée par mon Mentor, le mathématicien Paul Lévy qui choisit, pour ce qui allait remplacer la distribution de Gauss, le terme de "distributions stables." J'ai donc essayé de voir dans quelle mesure ces distributions s'appliquent aux données financières. Je commençai par les prix du coton, que j'avais (comme il a déjà été dit) amenés de Harvard à IBM. Chose extraordinaire, l'auto-affinité se révéla une conjecture très satisfaisante, les changements de prix de mois en mois suivant la même distribution que les changements de prix de jour en jour. La discontinuité était très présente, selon la valeur d'un paramètre libre, "alpha," qui est égal à 2 dans la distribution de Gauss et dans le mouvement brownien, et qui est plus petit que 2 dans les distributions stables. Pour le coton, je trouvais un alpha égal à 1,7.

J'ai tout de suite effectué un deuxième test essentiel, à savoir un test de stationarité. En effet, je commençais à avoir de plus en plus de contacts avec les milieux financiers et mes interlocuteurs essayaient de me convaincre qu'un des motifs pour lesquels les techniques statistiques usuelles ne rendaient pas compte des mouvements de prix est que ceux-ci ne sont pas stationnaires. C'est dire que la règle qui les gouverne n'est pas constante: Tantôt ils changent très rapidement, tantôt ils changent lentement. On me faisait aussi valoir que, sur une très longue période, il faut tenir compte d'événements extraordinaires. Par exemple, mes données sur le coton couvraient la période 1815-1960; il paraissait évident que la Guerre Civile américaine avait été un facteur majeur de perturbation pour le prix du coton.

En fait, j'ai vite montré que, s'il y a bien des différences, elles ne sont pas radicales. Certes, dans des circonstances "troubles", les variations de prix étaient

importantes, tandis que pendant d'autres périodes "plus calmes", les mouvements étaient plus faibles. Mais, il se trouve qu'un tel comportement "alterné" est une propriété des distributions stables. Elles prédisent, entre échantillons indépendants, une très grande variabilité se concentrant sur les événements les plus importants.

Il y a un autre test auquel j'attache beaucoup d'importance, car, bien que mathématicien de formation, je considère que le qualitatif, l'intuitif, est même plus important que le numérique. On sait qu'en physique expérimentale une erreur de mesure suit la distribution de Gauss, et que c'est la résultante de nombreuses contributions, dont chacune, même la plus grande, est négligeable par rapport au tout. En termes de causalité, cela signifie que, si les causes sont nombreuses, chacune est négligeable. Or, il en est tout autrement lorsque la somme suit une distribution stable. Si l'effet total est grand, alors, même si les causes sont nombreuses, on trouvera qu'une de ces causes, on ne sait pas nécessairement laquelle, a été très importante. C'est une caractéristique des distributions stables. Donc, en dehors de tout test numérique, il y a un contraste flagrant entre deux cas: dans le cas Gaussien, où α est égal à 2, beaucoup de causes contribuent toutes de façon négligeable, et dans le cas où α est plus petit que 2, on doit s'attendre à ce qu'une des contributions se révèle beaucoup plus importante que les autres. En termes pédants mais précis, l'identité ex-ante peut conduire à l'inégalité ex-post.

Pour mieux comprendre, pensons en termes de distribution de revenus. Prenant deux personnes au hasard, si la somme de leurs revenus annuels atteint 10 millions de francs, l'observateur averti sera pratiquement certain qu'il était tombé sur un millionnaire et un homme ou une femme au revenu ordinaire. Nul ne pensera avoir rencontré 2 millionnaires. L'accent porté sur la question de l'égalité ou de l'inégalité du partage est une

caractéristique essentielle de l'approche fractale aux questions financières.

R •• Comment expliquez-vous que la notion de fractales n'ait pas été largement appliquée au domaine financier, après la publication de vos premiers travaux, au début des années 60?

M •• Mes travaux ont d'abord suscité un énorme intérêt. Ainsi la Société d'Économétrie allait leur consacrer une session spéciale de son Congrès annuel de 1962. Puis l'intérêt a faibli, et ceci pour quatre motifs principaux, tout à fait légitimes. Premièrement, le temps de calcul que nécessitaient mes tests était extrêmement long. Qui d'autre avait la chance de bénéficier des ressources du centre de recherche d'IBM, où les ordinateurs étaient peu utilisés la nuit...? Cet argument du temps et de la lourdeur des calculs est longtemps resté valable.

La deuxième raison était psychologique; elle peut paraître étrange, mais se comprend très bien. Les notions que mon travail utilisait, telles que celles d'auto-affinité ou de stabilité (au sens de Lévy) n'étaient familières à personne. Certaines n'avaient encore jamais été utilisées en pratique. Beaucoup de textes de référence étaient en français, donc difficilement accessibles, notamment pour des chercheurs américains. Le contexte intellectuel m'était donc défavorable.

Un troisième motif avait été exprimé dès la présentation de mes travaux par un économiste du M.I.T., Paul Cootner. Mélangeant l'éloge avec une réserve de taille, celui-ci souligna que toutes les techniques statistiques qui avaient été jusqu'à présent développées, sans être nécessairement fausses, étaient à revoir. Ainsi, expliqua-t-il, "nous avons l'habitude de la méthode des moindres carrés, mais Monsieur Mandelbrot nous dit d'éviter les carrés parce qu'ils donnent des résultats trop variables. Il nous propose d'utiliser la méthode de la moindre déviation absolue. Mais on calcule les moindres carrés à la main, tandis que la moindre déviation

absolue demande des calculs très lourds." Et Cootner concluait ainsi: comme Winston Churchill, "Monsieur Mandelbrot ne nous promet que du sang, de la sueur et des larmes, parce qu'il remet en question tout ce que nous avons appris et que nous avons l'habitude d'utiliser."

"Tout le monde pensaient que mon travail était avant tout une spéculation intellectuelle, au mieux susceptible d'intéresser quelques théoriciens, mais sans grands enjeux réels!"

Enfin, voici une quatrième raison, qui est peut être la plus importante. Le contexte économique ne contribuait pas à populariser le modèle que je proposais. Tout au contraire! C'était l'époque de la présidence de Kennedy, dont les conseillers pensaient pouvoir déterminer le taux de chômage à un dixième de pourcent près, l'inflation à un centième de pourcent, que sais-je encore? Il était considéré comme peu urgent de développer des modèles capables d'intégrer et de rendre compte des phénomènes exceptionnels provoquant les grands risques. Même ceux qui qualifiaient mon travail de brillant pensaient qu'il ne s'appliquait qu'à une situation cahotique qui avait prévalu au XIXe siècle mais avait cessé de s'appliquer depuis qu'on avait appris à gérer l'économie. Donc, même si personne ne le disait vraiment, tout le monde pensait que mon travail était avant tout une spéculation intellectuelle, au mieux susceptible d'intéresser quelques théoriciens, mais sans enjeu réel!

R •• Comment expliquez vous le regain d'intérêt pour vos travaux à partir du début des années 80?

M •• Le retour d'intérêt a eu deux causes simultanées, mais de nature tout à fait différente. La première, qui provoque une demande de service, a résulté des

insuffisances du modèle de Black et Scholes qui présuppose la continuité des évolutions de prix et utilise le mouvement brownien comme support théorique. Ce modèle a eu de nombreux adeptes aussi bien parmi les praticiens des marchés que parmi les mathématiciens. Mais aujourd'hui il ne se passe pas de semaine sans qu'un portefeuille, dont en théorie les risques étaient maîtrisés, ne subisse une catastrophe majeure. On est bien obligé de se poser des questions, ce qui provoque une demande de services.

La seconde raison tient à l'évolution de la profession de physicien, qui provoque une offre de services. Ce que les américains appellent la "high finance physics" est devenu un débouché possible au moment même où les métiers qui accueillait traditionnellement les physiciens offrent de moins en moins de postes. Ayant déjà travaillé avec les fractales, certains de ces physiciens trouvent facile de les appliquer aux marchés et à la finance, tâche que j'avais déjà accomplie il y a trente ans. Donc, un faisceau de raisons militent aujourd'hui pour que l'application des fractales à la finance se développe et se généralise.

"Ce que dit le modèle fractale, c'est que la fréquence des grands risques est beaucoup plus grande que ne le suggère le modèle brownien, sort à cause de la discontinuité, sort de la non concentration".

R •• En quoi les fractales modifient-elles l'appréciation des risques, notamment des risques de marché et par conséquent le montant de capital à constituer pour s'en protéger ou les absorber?

M •• Pour répondre à cette question il faut considérer, d'une part, le problème de la continuité ou discontinuité des évolutions de prix, d'autre part, celui des queues de distribution.

Sur le premier point, je commencerai par une anecdote. Au début des années 60, un professeur du MIT, Sidney

Alexander, avait connu une brève période de grande célébrité. Alexander pensait avoir découvert que les prix ont une certaine inertie: ayant commencé à monter, ils auront tendance à continuer de monter; ayant commencé à baisser, ils continueront de baisser. Sur la base de cette croyance, il préconisait la "martingale" que voici: ayant choisi un seuil de référence – par exemple 10% – achetez ou vendez, quand l'appréciation, ou la perte, aura atteint ce seuil. Le Professeur Alexander assurait que cette méthode était gagnante. Mais sa démonstration me gênait: après avoir recommandé que l'on achète à 110, basait-il sa comptabilité sur ce prix de 110 ou sur le prix effectivement payé? Ce dernier peut être différent, parce que ce prix de 110 peut n'avoir jamais été atteint exactement. Il peut avoir été dépassé sans arrêt pendant une discontinuité du marché, la nuit ou à une fête. Donc on allait souvent payer plus, et quelquefois beaucoup plus, que le montant recommandé de 100 plus 10%. J'ai donc refait les calculs du professeur Alexander, mais en prenant les prix effectivement cotés, non pas les prix qu'il avait recommandés. Tous les gains de sa martingale disparaissaient. Il est vrai qu'il y a en mathématiques un théorème élémentaire selon lequel, lorsqu'une fonction continue passe d'une valeur à une autre, elle passe par toute valeur intermédiaire. Mais cela n'est pas vrai dans le cas discontinu. Quelquefois une opération de marché peut être réalisée au prix auquel on souhaitait qu'elle le soit. Mais en général c'est impossible, et c'est là un fait capital!

Passons aux distributions. On aime décomposer les mouvements de prix en périodes calmes qui correspondent à une distribution normale et les périodes agitées qui correspondent à des distributions de "grands changements". Les techniques statistiques traditionnelles ont été conçues pour les distributions normales. Mais si elles tiennent compte de 90 ou 95% des données, et même la quasi totalité des cas possibles, elles ne

valent pas pour les événements rares. On peut toujours dire que les événements rares sont si rares, qu'il n'est pas nécessaire d'en tenir compte et de s'en protéger. Les assureurs les qualifient de "acts of god" comme un ouragan ou un grande crue; ils peuvent être supportés parce qu'ils bénéficient d'une garantie implicite de l'Etat. Mais un krach boursier est un événement exceptionnel aux effets tout aussi dévastateurs, mais ne bénéficiant pas de garantie implicite. Le modèle fractal nous dit que la fréquence des grands risques est beaucoup plus grande que ne le suggère le modèle brownien, ou bien à cause de la discontinuité ou bien à cause de la non concentration.

"Avant de se lancer dans la prévision, il faut mieux faire ressortir le caractère fractal des phénomènes de marché et accepter de s'inscrire dans un cadre intellectuel renouvelé pour les interpréter."

R •• La gestion de portefeuille n'est-elle pas un point d'application privilégiée des fractales en finance, l'essentiel de la performance correspondant à des décalages de marché qu'il s'agit pour le gestionnaire de capturer?

M •• Ce n'est pas la majorité des cas qui est intéressante, mais les cas extrêmes. Et cela indique de manière très précise la direction dans laquelle la théorie peut continuer de progresser. Le cas de figure qui a été le plus étudié est celui des distributions stables qui permet de tenir compte des discontinuités mais qui repose sur l'hypothèse d'indépendance des changements. Mais rappelez-vous que le point de départ de toute ma réflexion figurait sur le tableau dans le bureau de mon collègue de Harvard. Ce diagramme sur les prix du coton indiquait, à sa façon, que lorsqu'on entre dans une période de grands changements, des changements plus grands encore sont susceptibles de se produire. Il y a là un terrain qui est presque vierge. Je me suis attaché depuis plusieurs années à développer des outils

mathématiques qui permettront de le défricher. Mais beaucoup reste à faire. L'application des fractales à la finance n'en est qu'à ses débuts.

R •• Si l'on admet le principe qu'un très petit nombre de mouvements aura des effets très importants, n'est-on pas naturellement conduit à essayer de prévoir la réalisation de ces événements?

M •• J'ai eu la chance extraordinaire de travailler pendant 35 ans au centre de recherche d'IBM. Les conditions de travail était très libres et il n'était pas nécessaire de faire de grandes promesses immédiates pour obtenir des outils de travail, tandis qu'au contraire nombre de mes collègues chercheurs devaient obtenir des fonds publics et donc s'engager à résoudre des problème spécifiques. J'ai donc pu procéder de façon très prudente. Il est trop tôt pour de se lancer dans la prévision il faut d'abord continuer de développer le modèle fractal pour lui permettre de mieux rendre compte de la réalité et d'intégrer sur le plan conceptuel les outils qui ont été préalablement développés.

R •• Considérez-vous que l'on doit nécessairement se protéger contre les événements très rares, même si le coFBt de l'assurance risque alors de dépasser la rentabilité de la protection?

M •• J'ai abordé cette question dans mes travaux en distinguant ce que j'ai appelé "l'effet Noé" et "l'effet Joseph". "L'effet Noé" correspond à une discontinuité majeure isolée: le déluge. "L'effet Joseph" correspond à une alternance de tendances vers de hausse ou de baisse. La prise en compte de l'un ou de l'autre dépend des prix dont on parle et en partie de l'horizon qu'on se fixe. Mais là encore , nous ne sommes qu'au tout début des recherches.

Encadré No. 1: Something old, something new, something borrowed and something blue.

"Fractals and Scaling in Finance" est un recueil d'articles réuni par Benoit Mandelbrot et dont la publication est imminente. Le sous-titre est parlant: "Discontinuity and Concentration." Pour présenter ce nouveau livre , l'auteur évoque une tradition américaine qui veut que la robe d'une jeune mariée doit comporter du vieux, du neuf, un emprunt et du bleu. "Something old, something new, something borrowed and something blue." Something old, c'est une douzaine d'articles anciens parus au début des années 60. Something new, ce sont des travaux très récents et des articles que j'avais à l'époque laissés inachevés. Something blue, parce que tout ce qui se rapporte à IBM et Yale est bleu. Et something borrowed , parce que j'inclus dans cet ouvrage l'article écrit par mon élève Eugene Fama lors de la présentation de mes travaux au Congrès d'économétrie de 1962, et aussi un article de William Morris. Ce dernier présidait à New York une banque d'investissement spécialisée sur les obligations municipales. Visionnaire, il avait très bien apprécié le rôle que l'ordinateur allait jouer dans le développement des marchés, et avait bien expliqué mon propos dans un opuscule sur les risques des opérations de marché.

Encadré No. 2: Benoit Mandelbrot