*Pour la Science*, n°234, avril 1997, pages 10-12.

# Les inattendus des fractales

**Benoit Mandelbrot**

Forme étoffée revue par Thomas Wieder 2003.

*La géométrie fractale est passée par deux phases. Dans la première, les « pathologies mathématiques » – selon la terminologie de 1900 – se sont faites « chair », permettant ainsi de maîtriser la rugosité, une caractéristique sensorielle jusque-là méconnue de la géométrie et des sciences. Dans une deuxième phase, ces anciennes « pathologies » se font faites beauté et se révélèrent elles-mêmes descendre des motifs décoratifs de tout temps.*

*Pour le philosophe, la valeur d'une découverte scientifique se mesure surtout par ce qu'elle a de dérangeant, et les inattendus de la science révèlent à la fois l'infinie complexité du réel et des limitations dans le nombre et l'efficacité des outils. À la surprise du jeune « post-doc » que j'étais en 1953-54, mon mentor John von Neumann considérait la science comme nécessairement « opportuniste ». Pour s'atteler à une tâche, il faut se vider l'esprit de tout ce qui est ressenti comme « périphérique », ou comme trop ou pas assez ambitieux. Mais, risque jamais évité, des oeillères d'abord fructueuses finissent par se formaliser, devenant des barrières qui se croient intrinsèques et permanentes. Certaines en arrivent à devenir des murailles entre disciplines-forteresses, finissant toujours par freiner le progrès.*

QU'EST-CE QU'UNE FRACTALE ? C'EST UN objet dont chaque morceau reproduit, en taille réduite, la même structure que le tout. La géométrie fractale n'est plus – de loin ! – le fruit d'un seul homme. Cependant, cet article se limite à des développements dont l'auteur fut l'agent principal.

IL ETAIT INATTENDU QUE LE COMBLE DE L'ESOTERIQUE, LES « MONSTRES MATHEMATIQUES » DE 1900, SE REVELENT ETRE « LA SUBSTANCE MEME DE NOTRE CHAIR ».

Pour citer Freeman J. Dyson, « les mathématiciens qui créèrent ces monstres les considéraient comme importants parce qu'ils démontraient que le monde des mathématiques pures inclut une richesse de possibilités allant bien au-delà des structures simples qu'ils voyaient dans la nature. Les mathématiques du vingtième siècle fleurirent dans la croyance qu'elles étaient allées complètement au-delà des limitations que leur avaient imposées leur origine dans les sciences de la nature. Mandelbrot nous montre que la nature a fait la nique aux mathématiciens. Ceux du dix-neuvième siècle avaient manqué d'imagination, mais pas la nature. Les exemples pathologiques que les mathématiciens avaient inventés pour se libérer du naturalisme du dix-neuvième siècle se révèlent désormais être inhérents à des objets familiers qui nous entourent. Nous n'avons pas à aller loin pour les chercher: les monstres de Lebesgue-Osgood sont la substance même de notre chair ».

Ces derniers mots firent écho à une idée que j'avais avancée, que lesdits monstres ne sont autres qu'un schéma de notre vasculature.

IL ETAIT INATTENDU QUE LESDITS « MONSTRES » DE 1900 NE SE REVELENT PAS ETRE DES « INVENTIONS » DES MATHEMATICIENS, MAIS SIMPLEMENT DE VIEUX MOTIFS DECORATIFS QU'ON VOIT DANS TOUTES LES CULTURES.

Le fond des remarques qui précèdent est maintenant bien acquis. Dans leur esprit, je notai en 1977 que « la chronique des sciences regorge d'histoires de sorciers et de contes de fées. Un sorcier crée un monstre, non par besoin ni par malice, mais simplement pour se prouver, ainsi qu'à ses émules, que la bête n'était point inconcevable. Le monstre lâché, les paysans lui refusent l'entrée de leurs villages, car ses traits les effraient autant qu'ils forcent leur incrédulité. Et puis un jour une fée leur dessille les yeux : le monstre est honnête homme, et tout prêt à les servir. On s'y habitue et l'on finit même par le trouver beau ».

Les villages auxquels je pense sont des disciplines scientifiques, et nos sorciers sont bien entendu des mathématiciens. Et il semble féerique et presque miraculeux — cet événement qui ne cesse de se répéter étant chaque fois inattendu — que des mathématiques en apparence parmi les plus contre-intuitives se révèlent si souvent indispensables pour appréhender le réel ambiant. Nos grands sorciers, dont certains voient les monstres qu'ils ont créés se transformer ainsi sous leurs yeux, ne seraient que des apprentis. « Comme les autres histoires de sorciers et de fées, celles qui adviennent aux sciences en disent sûrement beaucoup sur la nature profonde de la pensée et de la sensibilité humaine ».

Le dernier alinéa de la citation est toujours actuel, mais — inattendu tout nouveau — j'ai conçu des doutes sur la créativité « *ex nihilo* » desdits sorciers. Venant la contredire, d'innombrables lettres de lecteurs me firent vite conclure que la grande aventure que je vivais n'avait pas commencé vers 1875, mais remontait à la nuit des temps. Il avait paru inattendu que la géométrie fractale nous offre, entre autres cadeaux, une forme nouvelle d'art, ou tout au moins de décoration. Mais je crois maintenant que c'était tout naturel : avant d'être associées à l'austérité mathématique de 1900, les fractales existaient déjà et paraient l'art ou la décoration d'innombrables cultures de tous les continents.

Se pourrait-il même que la phrase « au commencement était le verbe » ne doive devenir « au commencement était l'image » ? De plus en plus, je vois du fractal partout dans des œuvres d'art. Pour ne donner que deux exemples relatifs aux débuts de la peinture abstraite, Frantisek Kupka et Augusto Giacometti avaient pour ambition de chasser le représentatif, perçu comme incident, et ne conserver que quelque chose de sous-jacent et plus essentiel. Or, ce qu'ils conservaient, anticipant les mathématiques, était fractal. Bien sûr, ce n'est pas en ces termes qu'ils pouvaient le voir, puisque, avant la géométrie fractale, il n'existait aucun langage pour l'exprimer.

Dans un autre ordre d'idées, des exemples de ces courbes, que j'avais choisi de qualifier de Sierpinski, abondent dans les pavements et plafonds des églises italiennes ou dans les mandalas tibétaines. La régression auto-similaire qui régit les fractales, on la trouve parfaitement formée dans les traites bouddhistes zen et chez Leibniz. J'en passe.

Somme toute, pour amplifier la remarque de F. J. Dyson, les fractales nous montreraient plutôt que la Nature s'associe à l'art pour faire la nique à tous ceux qui se complaisent à subdiviser le domaine du savoir et du sentir en forteresses voisines, séparées et hostiles.

IL ETAIT INATTENDU QUE DES DESSINS « REALISTES » DE MONTAGNES ET DE NUAGES PUISSENT S'OBTENIR AU MOYEN DE FORMULES MATHEMATIQUES, ET QUE CES FORMULES SOIENT EXTREMEMENT SIMPLES.

Goethe notait que « Grise, mon ami, est toute théorie, et vert l'arbre doré de la vie », et d'autres poètes et philosophes ne cessaient de nous rappeler que le pouvoir de la raison était sévèrement limité. En particulier, il était présumé acquis que la géométrie est inéluctablement sèche et dure et ne peut que le devenir de plus en plus. Elle pouvait fort bien représenter l'artificiel et le technique, mais décrire la richesse exubérante et « organique » de la nature était au-delà de tout ce qu'on pouvait en espérer.

L'inattendu se révéla par des images fractales qui, tout en étant totalement « artificielles » et « techniques », ressemblent à s'y tromper à des montagnes ou des nuages. Elles forment un des piliers d'une nouvelle géométrie, à la fois une raison pour la chaleur de l'accueil que lui réserve un vaste public, et la source d'une quantification et d'un contrôle de formes qui sont en train de devenir un nouvel outil précieux pour les spécialistes de géomorphologie.

Voici un autre inattendu essentiel. Historiquement, les images fractales n'ont pas été un corollaire de l'arrivée de l'ordinateur, mais un moteur de l'infographie. Impossible d'oublier les nuits blanches passées à produire nos premières images avec des programmes conçus pour tout autres buts et que personne ne savait ou osait modifier. Prenez l'étude des côtes : tous les 64 octets, la machine s'arrêtait et il fallait frapper « retour » pour la faire repartir. Au matin, nous avions en main, sur une feuille tapée à la machine, une « courbe » faite de X, O, M et W superposés. Inattendu et soulagement, la courbe esquissait la côte de la Nouvelle Zélande ; au large (en prime) une Ile Bounty. L'intérieur de la côte fut rempli d'encre avant d'être publié. On le voit à la p. 120 des *Objets fractals*, partie droite retournée de haut en bas.

Pour obtenir nos reliefs fractals, il a fallu attendre que les résultats d'un calcul puissent être affichés et photographiés sur un tube cathodique de laboratoire. Reprise des veillées et grande déception : les images ne nous « parlaient » pas. Mais l'addition d'un plan de référence allait suffire pour donner un nouveau soulagement, totalement inattendu : un semis d'îlots au bout d'une fine péninsule et une mer qui miroite à l'horizon, film de voyage revu en rêve (reproduit en bas de la p. 117 des *Objets fractals*).

L'arrivée d'une plus haute définition et de la couleur nous remit au travail, remplis de craintes. Allait-il se révéler que notre belle découverte n'était que le fruit d'une imagination trop fébrile, qui aurait interprété à son gré un dessin ambigu ? Il n'en fut rien, tout au contraire. Aussi longtemps que le dessin était dépourvu de détail, il avait fallu, pour obtenir l'effet désiré et le rendre susceptible d'être imprimé, « forcer » la dimension à une valeur un peu supérieure à celle obtenue par analyse quantitative des « côtes ». Bien sûr, ce coup de pouce était mentionné dans mon texte ; n'empêche, il inquiétait. Or, le dessin détaillé le rendit inutile.

IL ETAIT INATTENDU QUE L'IMAGE PUISSE REDEVENIR UNE SOURCE FECONDE DE CONJECTURES MATHEMATIQUES AUSSI SIMPLES D'APPARENCE QU'ATTRAYANTES PAR LEUR DIFFICULTE.

La preuve est au centre des mathématiques plurielles, mais elle n'en recouvre pas la totalité. Elles peuvent vivre pendant de longues périodes sans apport extérieur, mais en agissant ainsi elles se mutilent sévèrement et sans raison. Parlons du concept de « géométrie ». Il réussissait, autrefois, à combiner la raison avec la contemplation d'images. Mais celles-ci étaient obtenues à la main ou avec des outils peu sujets au progrès, et tout le monde avait conclu, vers 1950, que l'aspect visuel de la géométrie était mort, ou tout au moins était devenu stérile pour toujours, leur apport possible étant épuisé et laissant les mathématiques se diriger de façon inéluctable vers une abstraction toujours croissante. Jeune amoureux des images géométriques, j'osais à peine espérer que ce n'était qu'une éclipse plutôt que la mort, que ce dogme philosophique ne reflétait pas un absolu et ne faisait qu'extrapoler les limitations d'une technologie. Mais ce n'est qu'au moment où j'ai su contribuer à faire de l'ordinateur une machine à dessiner, que l'image a pu de nouveau imposer sa puissance de révélateur de faits géométriques, donc de conjectures appelant la démonstration.

Voici d'abord un exemple peu connu du public : définissons un amas brownien dans le plan comme étant la trajectoire d'un mouvement brownien entre deux retours à un point double. L'intérieur une fois noirci, le tout ne manque pas d'évoquer une île dont la côte est encore plus tortueuse que celle de la Bretagne. Mon expérience suggérait un contour de dimension fractale égale à 4/3. Le calcul numérique le confirmait et la saine curiosité exigeait une démonstration. Les experts se sont affairés, mais la question resta ouverte pendant dix-huit ans ! Jamais elle n'aurait été posée sans image.

Mes conjectures les plus célèbres sont relatives à l'ensemble de Mandelbrot, que j'ai sans doute été le premier à voir, et sans conteste le premier à reconnaître et à examiner avec le respect, le soin et la prudence que l'image mérite. Reprise des veillées qui avaient donné nos reliefs fractals. Instruments bricolés à peine utilisables ; innombrables clichés faits de taches gris foncé sur fond de gris clair, qu'il fallait « xéroxer » et « rexéroxer » encore pour les rendre publiables. Visites (dans le cauchemar) de Ramon Santiago y Cajal, louchant sur les neurones dans son antique microscope. Il fut inattendu de constater que la complexité extrême prévue soixante ans plus tôt par Fatou et Julia était, d'une part, visible à l'œil et, d'autre part, manipulable à volonté. Ensuite, introduction d'un nouvel ensemble encore plus compliqué, et là-encore, il fut inattendu de constater que la répétition de l'examen de ces clichés cristallisait cette complication en régularités jamais vues.

Pour finir, j'allais noter plusieurs propriétés évidentes à l'œil mais qui exigeaient d'être confirmées ou falsifiées, et je me hâtai de les présenter aux experts. La suite est bien connue. Une grande conjecture fut démontrée aussitôt, d'autres seulement après cinq ou dix ans. Mais la principale reste à tel point ouverte à ce jour, que même des solutions partielles provoquent admiration et enthousiasme. L'idée de l'ensemble en question peut être spécifiée de deux façons, disons, M et N : ce qui semble vrai, mais reste non démontré, est que M est identique à N lui-même, après qu'on ait ajouté les points limites de N.

IL ETAIT INATTENDU QUE, MEME QUAND IL N'Y A RIEN DE « REALISTE » DANS LES IMAGES FRACTALES SORTIES DE FORMULES MATHEMATIQUES TOUTES SIMPLES, CES IMAGES SOIENT SI LARGEMENT PERÇUES COMME BELLES, ET QU'IL EN SOIT DE MEME POUR LES MELODIES FRACTALES.

Les images de la géométrie d'Euclide sont-elles belles? Je reste de ceux qui le croient très profondément, mais la majorité des hommes ne comprend rien à notre engouement. On lit ainsi, dans un livre écrit et illustré par Georges Rouault, *Cirque de l'étoile filante*, que « l'art suprême n'est pas quantitatif ». Cette opinion, qui n'appartient pas à un seul peintre, mérite d'être discutée.

Un tableau de Titien, de Rembrandt ou de Picasso, ou même d'un tâcheron dont on débite les oeuvres au Prisunic, peut-il être représenté quantitativement ? Bien sûr que non, si on exclut une description atome par atome, ou même une description moins précise mais suffisante pour produire des copies qui tromperaient tous les experts.

Mais il ne s'ensuit nullement que je sois d'accord avec Rouault. Le fait que l'art qu'il pratiquait ne pouvait être quantitatif n'exclut pas que puisse émerger un art quantitatif, plus précisément, algorithmique, qui serait profondément différent du sien. Déjà, on trouve de la beauté aux montagnes et nuages fractals les plus classiques, dont le but initial était simplement utilitaire, et même aux vues les plus austères de l'ensemble de Mandelbrot. Mais qu'on relève la formule avec un piment de fantaisie, ou même de hasard, et l'on voit surgir toutes sortes d'effets fantastiques, marqués de styles bien définis et qu'on aurait cru être nécessairement le fruit de la créativité artistique. Du point de vue de l' « auteur » d'art, il n'y a là aucune trace de créativité artistique. Mais les émotions de l'amateur d'art ne s'accordent pas nécessairement avec celles de l'artiste. La discussion n'est pas près d'être close.

## IL ETAIT INATTENDU QUE LE MEME ENFANT, QUI RESISTAIT AUX PARTIES LES PLUS ANCIENNES ET LES PLUS SIMPLES DES MATHEMATIQUES, PUISSE S'ENFLAMMER POUR DES OBJETS GEOMETRIQUES D'UNE EXTRAORDINAIRE COMPLEXITE.

Autrefois, on enseignait les mathématiques dans l'ordre ou elles avaient été découvertes. Puis l'ordre fut inversé, commençant par celles d'aujourd'hui, mais passons.

Des maîtres excellents nous attardaient sur des faits que l'œil comprenait sans peine et déclarait évidents ; ils peinaient pour nous faire accepter l'idée que lesdits faits restaient à démontrer. Ils m'ont également appris pourquoi la démonstration a besoin de rigueur, mais l'apprentissage fut lent, et gêné par mille exemples d'erreurs de démonstration « impunies », que nous voyons même dans le travail de nos maîtres.

Voici donc un premier inattendu, qui repose la question de la « bosse des maths ». À la base du désir de prouver, on ne trouve pas tant le désir de mieux comprendre ce qu'on comprenait déjà un peu, mais plutôt le désir de comprendre au moins un peu ce qui paraissait incompréhensible. Or, quoi de plus incompréhensible, quoi de plus magique (magie très blanche, bien entendu, dont la répétition vient vite à la portée de tout le monde) que les images fractales telles que celles de l'ensemble de Mandelbrot ? La longue préparation qui m'a poussé à examiner ces images n'est plus nécessaire : aujourd'hui, le désir de les comprendre est devenu, spontanément, irrésistible pour l'enfant comme pour l'adulte.

Passant à la rigueur, quel inattendu que ce soit une activité presque manuelle, l'écriture de programmes d'ordinateur, qui ait changé la donne ! Elle nous apporta une métaphore puissante : les programmes qui suivent les règles marchent, les autres ne marchent pas. La machine vous le dit immédiatement (comme il se doit pour que l'apprentissage soit efficace). Il n'y a aucun sens à dire qu'un programme est « presque correct », seulement qu'il s'est révélé, après coup, facile à corriger. Bien sûr, les logiciels sont quelquefois défaillants, mais ceci n'affaiblit pas le message : la différence fondamentale mais élusive que les mathématiques font entre le rigoureux et l'approximatif trouve une contrepartie « parlante » dans la différence, dont personne ne saurait douter, entre les programmes qui marchent, parce qu'ils obéissent strictement, sans exception, à toutes les règles, et les autres programmes.

## IL ETAIT INATTENDU QUE CE SOIT DANS L'ANALYSE MATHEMATIQUE DITE « FINE » D'IL Y A CENT ANS QUE SE SOIT CACHEE LA CLEF PERMETTANT DE QUANTIFIER LA NOTION DE « RUGUEUX ».

En excluant Architas et Eudoxe de son Académie, Platon (selon Plutarque) maintenait « qu'ils corrompaient et gâtaient la dignité et ce qu'il y avait d'excellent en la géométrie… en la faisant descendre… aux choses sensibles et matérielles ». Mais ce sont précisément certaines des « sensations » ainsi chassées qui allaient devenir les sources des sciences, telles la vision, l'ouïe et les sens du lourd, chaud ou sucré. Seul le sens du rugueux gardait une place exiguë et mal quantifiée.

Sans penser désobéir à Platon (comme ils l'auraient fait s'ils s'étaient aventurés à penser au rugueux dans la nature) des mathématiciens se lassaient de la dérivée, limite de $dy/dx$, et Holder la remplaçait par la limite de logdy/logdx. Plus tard, Hausdorff et Besicovitch concevaient une dimension « anormale » sans aucune finalité concrète. De nombreuses décennies s'étant écoulées, l'inattendu intervint quand je sus transmuer l' « exposant de Holder » en « exposant de rugosité ». C'est là encore une notion qu'on peut aussi réexprimer en termes d'une dimension devenue fractale, et qu'on peut mesurer avec une grande précision. Elle joue pour la rugosité le rôle que la température joue pour la chaleur.

IL ETAIT UNIVERSELLEMENT ENTENDU QUE LE MONDE PHYSIQUE EST REGI PAR DES EQUATIONS QUI PRESUPPOSENT QUE TOUT VARIE DE FAÇON « DOUCE ». COMMENT SE PEUT-IL DONC QU'IL REGORGE DE FRACTALES ?

Ce qui était entendu reste vrai, mais il y a en général des singularités où rien ne va plus. Ma thèse est qu'il est « typique » que ces singularités finissent par former un ensemble fractal. C'est, parmi d'autres exemples de plus en plus nombreux, la base de mon point de vue sur la turbulence et la nature de certaines arborescences fractales appelées DLA (agrégats limités par la diffusion), ainsi que la base de la théorie des interfaces de diffusion de Bernard Sapoval.

IL ETAIT INATTENDU QU'IL DEVIENNE UTILE DE CONCEVOIR LE HASARD COMME POUVANT PRENDRE PLUSIEURS « ETATS » DISTINCTS.

Le hasard ne sera jamais considéré comme désirable, mais dans sa forme qu'on peut appeler « usuelle », il a été si bien dompté que j'ai pu l'appeler « bénin ». On croyait même, sans d'ailleurs l'exprimer, que les conditions que cette forme postule sont nécessairement et automatiquement vérifiées dans la nature.

Il était donc inattendu que j'en vienne à constater que les marchés financiers et maints autres phénomènes imprévisibles échappent au hasard bénin. Soit ils ne satisfont pas les conditions requises, soit les conséquences tirées de ces conditions ne se révéleraient que dans des circonstances limites qu'on ne rencontrera jamais. J'ai conclu qu'il fallait se faire à l'idée que, dans la nature, le hasard peut aussi se rencontrer dans au moins deux autres « états », à savoir « sauvage » et « lent ».