CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire.* Note (*) de M. **Benoit Mandelbrot**, présentée par M. Szolem Mandelbrojt.

Le premier but de la présente Note est d'introduire une façon d'itérer des multiplications aléatoires. Ceci conduit à une nouvelle classe de fonctions aléatoires (f. a.), dont l'intérêt est à la fois théorique et pratique [applications à la turbulence intermittente (1) et à la distribution des minéraux (2)]. Le deuxième objet de la présente Note est de généraliser le concept de variable aléatoire (v. a.) stable au sens de Lévy, en remplaçant les moyennes simples par des moyennes pondérées de façon aléatoire (3).

1. Construction. — Soit une suite de « poids », des v. a. indépendantes et identiquement distribuées (i. i. d.). C étant un entier > 1 donné, les C premiers poids seront désignés par $W(i_1)$, $0 \leqq i_1 \leqq C-1$; les C^2 suivants par $W(i_1, i_2)$, etc. Soit dans l'intervalle $]0, 1]$, un réel t développé dans la base C sous la forme $t = 0, i_1, i_2, \ldots$. Partant de $X'_0(t) \equiv 1$, la suite de mesures aléatoires $X'_n(t)$ sera définie par

$$X'_n(t) = W(i_1)\,W(i_1, i_2)\ldots W(i_1, i_2, \ldots, i_n).$$

Posons $X_n(t) = \int_0^t X'_n(s)\,ds$. Notre objet premier sera d'étudier $X_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} X_n(t)$, et, si X_∞ est dégénérée, $Y_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} Y_n(t)$, où $Y_n(t) = X_n(t)/A_n$, A_n étant une suite normalisatrice non aléatoire choisie de façon appropriée.

Nous écrirons $F(w) = \Pr\{W < w\}$, et supposerons que $EW \geqq 0$ — à plus forte raison que $F(0) < 1$ — car tout cas où $EW < 0$ se ramène à un cas où $EW > 0$ en remplaçant A_n par $(-1)^n A_n$.

Remarque. — Lorsque $C = \Gamma^2$, avec Γ entier > 1, la construction se généralise au cas où t est un vecteur de coordonnées $t' \in]0, 1]$ avec $t' = 0, i'_1, i'_2, \ldots$ et $t'' \in]0, 1]$ avec $t'' = 0, i''_1, i''_2, \ldots$. Dans ce cas, chaque i_n est un vecteur de coordonnées i'_n et i''_n allant de 0 à $\Gamma-1$.

2. Cas particuliers. — Le cas le plus intéressant (à cause du nombre des applications et de la précision des théorèmes) est celui où $F(0) = 0$ et $0 < EW < \infty$; s'il en est ainsi, on supposera $EW = 1$.

Un autre cas, intéressant parce qu'il se ramène à une théorie classique, est celui où W est binaire, avec

$$\Pr\{W = 1\} = p > 0 \qquad \text{et} \qquad \Pr\{W = 0\} = 1-p > 0.$$

Alors, $CX_1(1)$ est la somme de C v. a., i. i. d., de la forme $W(i_1)$; $C^2 X_2(1)$ s'obtient en remplaçant chacun des termes de $CX_1(1)$ par une v. a. ayant la même distribution que $CX_1(1)$. Par suite, $C^n X_n(1)$ résulte d'un processus de naissance et de mort pour lequel le nombre de descendants à chaque génération est la v. a. $CX_1(1)$. Classiquement, si $pC > 1$, $C^n X_n(1)/[CEX_n(1)]^n = X_n(1)/p^n$ *converge presque sûrement* (p. s.) vers une limite non dégénérée.

Conclusion. — Si $0 < EW < \infty$, on s'attend à voir se poser des problèmes limites avec convergence p. s.

9. Conjecture. — $EW = 1$ suffit pour que $X_n(t)$ converge p. s.

10. Le cas positif. Définitions. — Lorque $F(0) = 0$ et $EW = 1$, soient

$$\alpha = \max\{1, \sup[h : EW^h < C^{h-1}]\} \qquad \text{et} \qquad D = 1 - EW \log_C W.$$

Lorsque $F(0) = 0$, soit $\varphi(h) = \log_C [EW^h/C^{h-1}] = \log_C EW^h - (h-1)$. Ce $\varphi(h)$ est convexe, et lorsque $\varphi(1) = \log EW = 0$, α est en quelque sorte le deuxième zéro de $\varphi(h)$ (admettant que celui-ci dépasse le premier zéro $h = 1$). Par ailleurs, D est formellement $-\varphi'(1)$. Lorsque $F(0) = 0$ et $\varphi(0+) > 0$, soit β la valeur de h telle que la droite joignant 0 à $[\beta, \varphi(\beta)]$ n'ait pas d'autre point commun avec le graphe de φ.

Proposition. — *On a $\alpha = \infty$ si et seulement si $W < C$.*

Remarque. — Appelons la v. a. Z « régulière » si $EZ^h < \infty$ pour tout h. On verra que lorsque $\alpha = \infty$, les X_∞ sont réguliers. Lorsque $1 < \alpha < \infty$, les X_∞ sont irréguliers. Lorsque $D < 0$, les X_∞ sont dégénérés. Le cas de transition $D = 0$ reste à étudier.

11. Proposition. — Soit $F(0) = 0$, $EW = 1$ et $\alpha > 2$. Alors $EX_\infty^h(t) = \lim_{n\to\infty} EX_n^h(t)$ pour tout $h <$ le plus grand entier $< \alpha$.

Preuve. — Ceci résulte encore directement du théorème classique de convergence des martingales.

12. Conjectures :

(A) Soit $F(0) = 0$ et $EW = 1$. Pour que $X_\infty(t)$ soit non dégénérée, et que l'équation du paragraphe 4, avec $A = 1$, ait une solution non dégénérée, il suffit que $\alpha > 1$.

(B) De plus, on a, dans ce cas, pour tout $h < \alpha$, $EX_\infty^h(t) = \lim_{n\to\infty} EX_n^h(t)$.

13. Proposition. — *Soit $F(0) = 0$, $EW = 1$ et $\alpha > 1$. Si $X_\infty(t)$ est non dégénérée, $EX_\infty^h(t) = \infty$ pour tout $h > \alpha$.*

Preuve. — Il suffit de prendre t de la forme C^{-n}, et par suite d'étudier $t = 1$. Alors, pour tout $h > 1$, le paragraphe 4 donne $EX_\infty^h(1) > C^{1-h} EW^h EX_\infty^h(1)$. Si $h > \alpha$, ceci exige, soit $EX_\infty^h(1) = 0$, qui est exclu, soit $EX_\infty^h(1) = \infty$, qui est prouvé.

14. *Remarque.* — Lorsque $F(0) = 0$, $X'_\infty(t)$ généralise la mesure de Besicovitch, laquelle s'obtient si les poids $W(i_1)$ sont imposés à l'avance, et satisfont

$$W(i_1, i_2, \ldots, i_n) = W(i_n).$$

Il est commode de supposer que les valeurs possibles de W sont toutes différentes, la probabilité p_j de chaque valeur w_j étant $1/C$, avec $\sum_{j=0}^{C-1} w_j/C = 1$. La mesure de Besicovitch régit la distribution des nombres pour lesquels les « décimales » de base C ont les probabilités $\pi_j = p_j w_j$. Pour généraliser, on peut procéder en plusieurs étapes. Tout d'abord, tout en continuant de fixer les $W(i_1)$, on laisse leur ordre suivre une permutation choisie au hasard. Ensuite, on laisse libres les valeurs des $W(i_1)$ — et en particulier on laisse libre le nombre de valeurs différentes possibles — en se contentant d'imposer une suite de « relations de conservation » :

$$\sum_{i_1=0}^{C-1} W(i_1) = C, \qquad \sum_{i_2=0}^{C-1} W(i_1, i_2) = C \quad \text{pour tout } i,$$

$$\sum_{i_3=0}^{C-1} W(i_1, i_2, i_3) = C \quad \text{pour tout couple } (i_1, i_2), \qquad \ldots.$$

Un troisième cas, également intéressant parce qu'il se ramène à une théorie classique, est celui où W est binaire, avec $\Pr\{W = 1\} = \Pr\{W = -1\} = 1/2$. On se ramène alors au théorème central limite de Bernouilli : $C^n X_n(1)/\sqrt{C^n}$ *converge en distribution* vers une limite gaussienne réduite, les v. a. $X_n(1)\, C^{n/2}$ étant indépendantes.

Conclusion. — Si $EW = 0$, on s'attend à voir se poser des problèmes limites avec convergence en distribution.

3. Régression fondamentale. — On a, *entre les distributions*, la relation

$$X_{n+1}(1) = C^{-1} \sum_{g=0}^{C-1} W_g X_{n,g}(1),$$

où les v. a. W_g et $X_{n,g}$ sont indépendantes et, pour tout g,

$$\Pr\{W_g < w\} = F(w) \qquad \text{et} \qquad \Pr\{X_{n,g}(1) < x\} = \Pr\{X_n(1) < x\}.$$

4. Invariance fondamentale. — Si $X_n(1)/A_n$ converge en distribution vers $Y_\infty(1)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = A \qquad (0 < A < \infty),$$

et l'on a, *entre distributions*, la relation

$$Y_\infty(1) = \sum_{g=0}^{C-1} [A\, C^{-1} W_g]\, Y_{\infty,g}(1),$$

où les W_g et $Y_{\infty,g}$ sont indépendantes, et, pour tout g,

$$\Pr\{W_g < w\} = F(w) \qquad \text{et} \qquad \Pr\{Y_{\infty,g}(1) < y\} = \Pr\{Y_\infty(1) < y\}.$$

Il est aisé de reécrire l'invariance ci-dessus en termes de la fonction caractéristique de $Y_\infty(1)$.

Remarque. — L'invariance ci-dessus généralise celle qui définit la stabilité au sens de Lévy, laquelle correspond au cas où les W_g sont des réels identiques. L'invariance peut être considérée comme une équation en $\Pr\{Y_\infty(1) < y\}$. Ses solutions dépendent à la fois de $F(w)$ et de C. Certaines sont données par la construction du paragraphe 1; le problème de l'existence d'autres solutions reste ouvert.

5. Proposition. — *Soit* $EW = 1$; *pour tout* t, $X_n(t)$ *est une martingale. Pour tout* n *fini et* h *entier* > 1, $EX_n^h(t) > 0$.

6. Proposition. — *Soit* $EW = 1$. *Pour tout* h *entier* > 1, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $0 < \lim_{n\to\infty} EX_n^h(t) < \infty$ est $EW^h < C^{h-1}$.

7. Conjecture. — Le résultat du paragraphe 6 tient pour tout h réel > 1.

8. Proposition. — *Soit* $EW = 1$. *Afin que la martingale* $X_n(t)$ *converge p. s., deux conditions suffisantes (non exclusives) sont :* (*a*) $F(0) = 0$ *et* (*b*) $EW^2 < C$. *Dans le deuxième cas,* $X_\infty(t)$ *est non dégénéré et l'équation du paragraphe* 4, *avec* $A = 1$, *possède au moins la solution non dégénérée* $X_\infty(1)$.

Preuve. — Théorème de convergence des martingales ([4]).

La mesure résultante — considérée par Yaglom [*voir* (1)] — peut être qualifiée de « microcanonique ». Enfin, on rend les W indépendants, obtenant ainsi $X'_\infty(t)$. La possibilité de dégénérescence n'apparait qu'à cette dernière étape. Toutefois, dans la généralisation où t est multidimensionnel, elle apparaît déjà dans l'étude des sections unidimensionnelles (1).

(*) Séance du 19 novembre 1973.

(1) Cette application est développée dans mon article *Intermittent Turbulence in Self Similar Cascades : Divergence of High Moments and Dimension of the Carrier*, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 62, 1974, p. 331-358.

(2) Cette construction est fortement apparentée à celle développée dans mon article, *Possible Refinement of the Lognormal Hypothesis Concerning the Distribution of Energy Dissipation in Intermittent Turbulence*, dans *Statistical Models and Turbulence* (Rédacteurs : M. Rosenblatt et C. Van Atta), Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag, 1972. Le dit article introduit les f. a. limites de lognormales,

$$L'_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} L'_n(t),$$

où $\log L'_n(t)$ est normal. Le cas intéressant est celui où L'_∞ est non dégénérée et singulière. Un procédé général pour construire $\log L'_n(t)$ est de la décomposer en une somme de f. a. $\log L'_{n+1}(t) - \log'_n L(t)$ à spectres bornés. Malheureusement, la théorie de $L'_\infty(t)$ s'éloigne des théories de Kolmogoroff et Yaglom [*voir* (1)] et présente des difficultés formelles. C'est ce qui a motivé la construction de la présente Note.

(3) Cette généralisation n'apparaissait pas dans le contexte indiqué dans (2).

(4) *Voir*, par exemple, J. L. Doob, *Stochastic Processes*, New York, Wiley, 1953.

Thomas J. Watson Research Center of I. B. M.,
PO Box 218,
Yorktown Heights,
New York, 10598, *U. S. A.*