ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

Fraktaler – en helt ny form for matematik

Det var en sensation, da den polskfødte matematiker og filosof *Benoit Mandelbrot* i 1975 præsenterede sine mærkelige computerskabte former. Pludselig blev dørene slået op til en helt ny verden, og i dag er fraktalerne og de tilknyttede teorier om kaos blevet en vigtig del, ikke kun af matematikken, men også af mange andre videnskaber.

I århundreder har man kunnet sætte formler på geometriske figurer og mønstre, men her fik man redskaber til også at bearbejde naturens uendelige rigdom af former – kystlinier, bjergkæder, skyer, plantevækster, solpletter, vandreklitter, spredning af epidemier, ja, endog aktiekurser og priserne på bomuld. Også til computerens komprimering af billeder og musik bruger man den nye videnskab.

Fraktaler kaldte Mandelbrot sine figurer – efter det latinske ord *fractus,* der betyder *brudt* – og dette navn er siden også blevet benyttet om mere enkle kurver og geometriske konstruktioner, der blev skabt allerede i begyndelsen af forrige århundrede, fx *Kochs snefnug* fra 1904 (se »Matemagi« side 6).

Først med computerens fremkomst i 1970'erne blev det muligt at optegne mere indviklede figurer. Mandelbrot gjorde det ved lange serier af beregninger, hvor han hele tiden regnede på den samme enkle formel, idet han for hvert trin – hver såkaldt *iteration* – fodrede computeren med resultatet af den foregående udregning. Hvad han skabte var billeder af formler og deres opførsel med forskellige værdier.

Med en lommeregner kan vi gøre det samme i det meget små: Tast fx 3 og brug så kvadratrods-tasten igen og igen. Ved første iteration får vi $\sqrt{3} = 1,73205....$ Ved

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

næste iteration »fodrer« vi kvadratrods-formlen med det fundne tal og uddrager kvadratroden af det, osv., osv. I skemaet til højre ses de første 30 iterationer, og som det vil ses, ender resultatet efterhånden på 1. Det vil det gøre, ligegyldigt hvilket tal vi end starter med. Man siger, at tallet 1 er et *tiltrækkende fikspunkt*. Vi »trækkes« mere og mere imod dette tal.

Nu er formlen $\sqrt{x}$ som nævnt meget enkel. Vælger vi fx formlen $x^2-1{,}2$ og begynder med $x = 0{,}5$, så får vi ved den første iteration resultatet $0{,}5^2-1{,}2 = -0{,}95$. Dette tal sættes ind i formlen. Nyt resultat: -0,2975. Igen ind i formlen osv. Iteration efter iteration. Men her ender vi ikke med et tiltrækkende fikspunkt. I stedet bliver resultatet ved med at skifte mellem to tal: -1,17082 og 0,1782. En 2-cyklus.

Med andre formler og andre startværdier ender vi i rent kaos – det kaos, der også præger mangt og meget i naturen.

Mandelbrots berømteste fraktal er den, der ses herover. Den tegnes op af en computer med et grafikprogram, der sætter punkter i et koordinatsystem, hvis vandrette x-akse løber tværs gennem figuren.

Punkternes placering beregnes med to formler. Den ene formel, x^2+y^2+a, giver x-værdierne – altså punkternes afstand fra den lodrette y-akse. Den anden, $2xy+b$, giver y-værdierne – altså punkternes afstand over x-aksen.

I disse to formler indsættes en masse værdier for a og b, hvorefter computeren itererer som beskrevet ovenfor. Med nogle værdier går x og y hurtigt mod nul eller uendeligt, hvilket resulterer i en sort prik i koordinatsystemet. Men med andre værdier går det mod et tiltrækkende fikspunkt, eller resultatet skifter i en 2-cyklus. I så fald siger man, at a og b tilhører *Mandelbrots mængde*, og i figuren sættes en prik i grænseområdet omkring den sorte form.

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

Alt efter hvor hurtigt resultatet nås – hvor mange iterationer der skal til – får prikken en farve.

Figuren ligner ved en første betragtning blot nogle sorte cirkler med diverse gevækster, men det er fraktalens natur, at de samme former genfindes igen og igen i detaljerne. De små runde cirkler har samme egenskaber som den store cirkel. På hver af dem sidder igen endnu mindre gevækster og på disse igen de samme detaljer. Vi kan blive ved at zoome ind og stadig møde de samme former (i Mandelbrots mængde dog ikke helt konsekvent, men så er der andre oplevelser).

Matematikerne kalder denne gentagelse af formerne for *selvsimilaritet* – dette at fraktalen ligner sig selv i stadig større forstørrelser af små udsnit. I én uendelighed dybt ind i fraktalens landskab ...

Vi kender også selvsimilariteten fra naturen. Havets bølger set på afstand ligner krusningerne på en vandpyt. Hver lille buket i et blomkålshoved ligner hele hovedet. Et bjerg består af mindre dele – og disse igen af endnu mindre dele – der hver især ligner det store bjerg. Sidestilkene på et bregneblad ligner hele bregnen - osv.

Det er, som om naturen benytter den fraktal-matematik, som vi mennesker først med computeren har formået at trænge ind i. Og at det nogle gange ender i kaos, det ved vi. Små bitte ændringer i naturens formler kan føre til katastrofer.

I 1962 kom den amerikanske matematiker og meteorolog *Edward Lorentz* med historien om sommerfuglen, der basker med vingerne i Brasilien. Et lille vindpust opstår, det ganges en smule op, forstærkes – og ender som en tornado i Florida. Det er faktisk ikke helt utænkeligt.

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

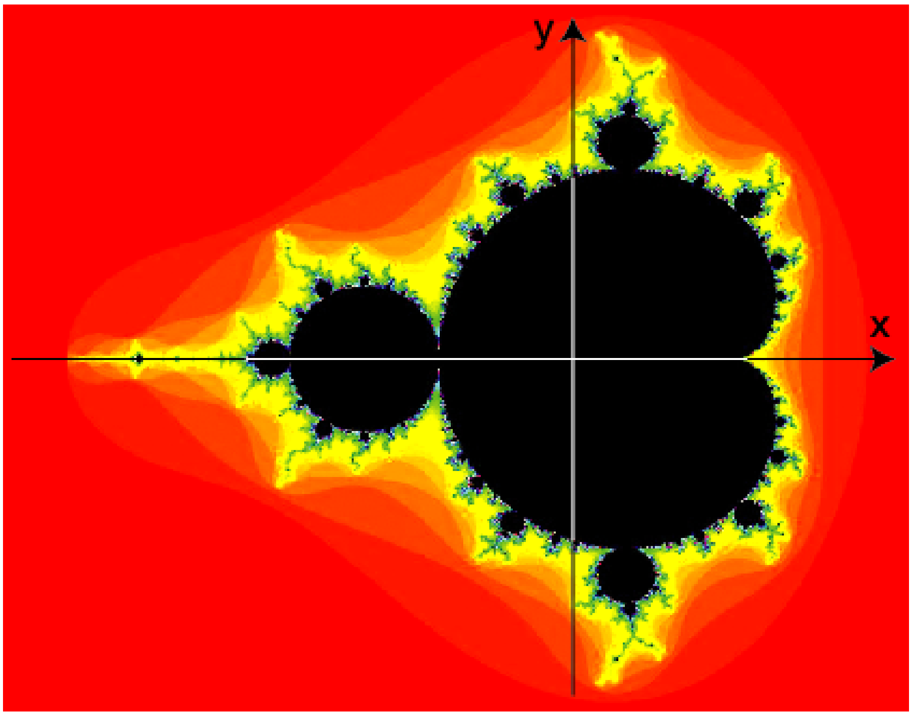
{Billedtekst: FraktalMandelbrot.psd}
»Fraktalernes fader«, Benoit B. Mandelbrot, blev født i 1924 i Polen og uddannet i Frankrig, og siden 1958 har han boet i USA. Før ham havde andre beskæftiget sig med den fraktale geometri, blandt andet franskmanden Gaston Julia i 1918, og Mandelbrot byggede til en vis grad på deres arbejde. Men han var den, der for alvor tog computerkraften i brug og åbnede en helt ny matematisk videnskab, som man langtfra er færdig med at udforske. I sin bog »Les Objets Fractals: Formes, Hasard et Dimension« fra 1975 lancerede han ordet fraktal.

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

$\sqrt{x}$	
	3
1	1,73205080757
2	1,31607401295
3	1,14720269044
4	1,07107548307
5	1,03492776708
6	1,01731399631
7	1,00861984727
8	1,00430067573
9	1,00214803085
10	1,00107343929
11	1,00053657569
12	1,00026825187
13	1,00013411694
14	1,00006705622
15	1,00003352755
16	1,00001676363
17	1,00000838178
18	1,00000419088
19	1,00000209544
20	1,00000104772
21	1,00000052386
22	1,00000026193
23	1,00000013096
24	1,00000006548
25	1,00000003274
26	1,00000001637
27	1,00000000818
28	1,00000000409
29	1,00000000204
30	1,00000000102

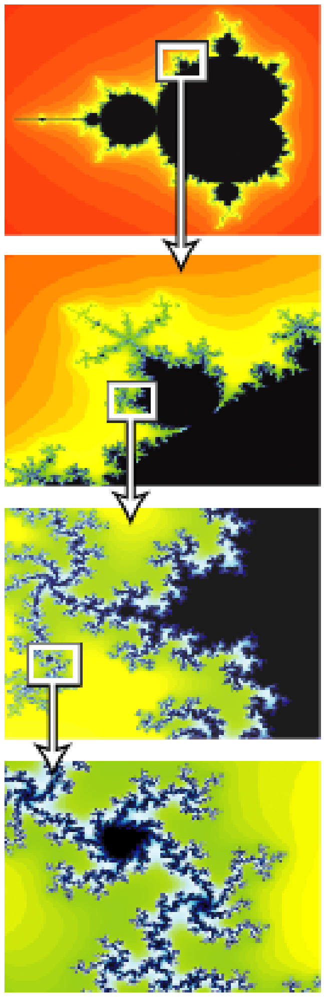
{Billedtekst: Fraktal03.ai}
Når man itererer på formlen √x, fx med x=3 – altså uddrager kvadratroden igen og igen, hver gang lader x være lig med resultatet fra den forrige iteration – så får man en række tal, der meget hurtigt går mod 1. Tallet 1 er et tiltrækkende fikspunkt. *Herover ses de første 30 iterationer.*

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91
Dato: juli 23, 2003
Manus: **Math 4 / Fraktal**
Manusark nr. **6**



130 {Billedtekst: Fraktal02,ai}
Fraktalen Mandelbrots mængde *bygger på to formler. Man kan købe forskellige programmer og selv lege med denne og andre fraktaler på sin computer.*

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91



{Billedtekst: Fraktal01.ai}
Der dukker stadig nye detaljer op, når man zoomer ind på en fraktal. Herover tager vi kun de tre første skridt, men rent teoretisk kan mønsteret forstørres i det uendelige. I mange fraktaler vil man stadig møde de samme former. Dette gælder dog ikke helt Mandelbrots mængde.

ANKER TIEDEMANN
Krogvej 30 A, 2830 Virum
? 45 85 38 91, fax: 45 83 38 91

{Billedtekst: ????}
At danne en fraktal på computeren kan kræve mange milliarder beregninger, og alt efter hvor hurtig ens computer er, kan det tage timer, måske endog dage. Mange arbejder kunstnerisk med fraktalerne. De genererer nogle rigtigt fraktaler, zoomer ind i dem, drejer dem, skærer i dem, lægger andre former til og skaber nogle billeder, der kan være meget fascinerende kunstværker. I hvert fald nogle gange.

{Billedtekst: ????}
Fraktaler anvendes inden for mange videnskaber, men tillige i computergrafik og film. I designprogrammer til fremstilling af tredimensionelle billeder bruges fraktaler til mønstre og strukturer – samt til komprimering af de ofte store dokumenter. Og i filmens verden bruges fraktalerne til computerskabt animering. Tænk blot på de myldrende dinosaurer i filmen »Jurassic Park«.