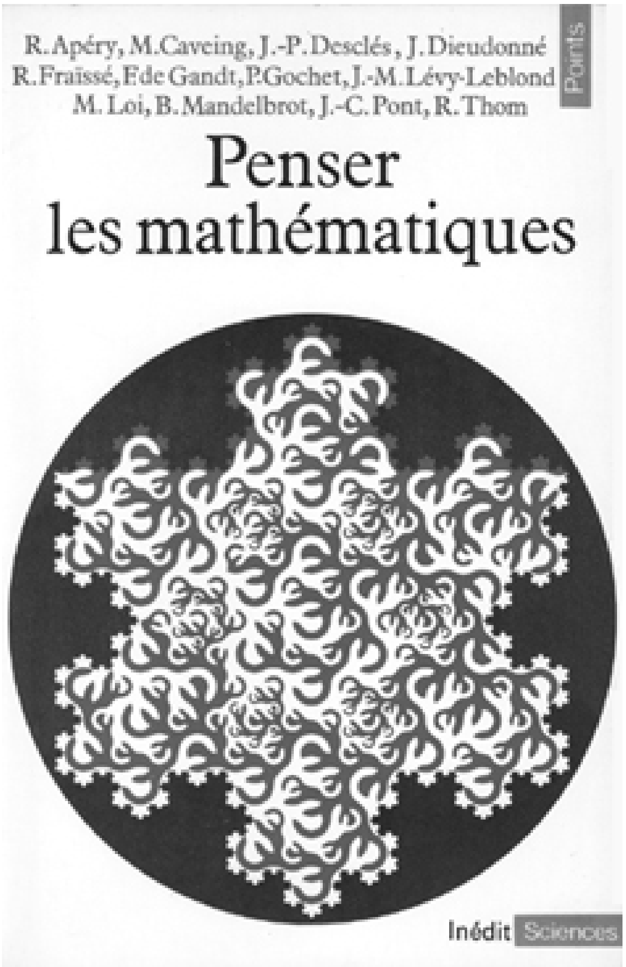


Penser les mathématiques. (Séminaire Jean Dieudonné, Maurice Loi & René Thom). Textes preparés par F. Guénara & G. Leliève. Collection Points-Sciences, Paris: Editions du Seuil, 1982, 226-251.

Des monstres de Cantor et Peano à la géométrie fractale de la nature

Benoît Mandelbrot

• Texte basé sur une conférence au séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'École Normale Supérieure, le 20 juin 1977. • La première étincelle de la théorie des fractales jaillit il y a cent ans, le 20 juin 1877, dans une lettre de Cantor à Dedekind. Cantor remettait en cause certains fondements de la géométrie euclidienne et notamment la notion de dimension. Aujourd'hui, la révolution conceptuelle qui s'ensuite se révèle avoir des retombées inattendues en hydrologie, turbulence, anatomie, botanique et dans d'autres disciplines, extrêmement concrètes autant que variées.

• En 1890, Peano annonçait l'existence de courbes capables de remplir un carré. S'agit-il de "monstres" dénués d'utilité? On l'a toujours cru, mais l'auteur soutient le contraire; à titre d'exemple, il montre comment certaines de ces "approchées" de Peano fournissent un modèle géométrique d'un réseau fluvial.

• D'autres monstres apparentés au précédent ont été engendrés par Cantor (1884), Von Koch (1904) etc. On peut les qualifier de "chimères", car ce sont des "figures intermédiaires" entre points et lignes, lignes et surfaces, ou surfaces et volumes. L'auteur les baptise fractales. Pour elles un avatar "monstrueux" de la notion de dimension, dû à Hausdorff, est une fraction. La surface intérieure du poumon, par exemple, est un objet qu'on peut, en première approximation, représenter par un ensemble fractal.

Le concret, est-ce de l'abstrait rendu familier par l'usage?

La chronique des sciences regorge d'histoires de sorciers et de contes de fées. Un sorcier crée un monstre, non par besoin ni par malice, mais simplement pour se prouver, ainsi qu'à ses émules, que la bête n'était point inconcevable. Le monstre lâché, les paysans lui refusent l'entrée de leurs villages, car ses traits les effraient autant qu'ils forcent leur incrédulité. Et puis un jour une fée leur dessille les yeux: le monstre est honnête homme, et tout prêt á les servir. On s'y habitue et l'on finit même par le trouver beau.

Les villages auxquels je pense sont des disciplines scientifiques, et nos sorciers sont bien entendu des mathématiciens. Et il semble féerique et presque miraculeux –. cet événement qui ne cesse de se répéter étant chaque fois inattendu –. que des mathématiques en apparence parmi les plus contre-intuitives se révèlent si souvent indispensables pour appréhender le réel ambiant.

Nul n'a plus contribué que Georg Cantor et Giuseppe Peano à la création de formes étranges concurrentes des chimères de la mythologie. Nous allons voir, cependant, qui ces chimères viennent d'être domptées à leur tour. Cantor a écrit que "l'essence des mathématiques réside précisément dans la liberté", et Richard Dedekind que "nous [les mathématiciens?]. sommes de race divine et possédons, sans aucun doute, le pouvoir créateur –. tout particulièrement pour les choses de l'esprit". Voire! A ces fervent pratiquants de l'art pour l'art, la nature ne cesse de révéler que maintes de leurs créations les plus libres lui étaient familières depuis toujours. On est plus près du mot de Pascal, que "l'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir". Nos grands sorciers, dont certains voient les monstres qu'ils ont créés se transformer ainsi sous leurs yeux, ne seraient que des apprentis.

Comme les autres histoires de sorciers et de fées, celles qui adviennent aux sciences en disent sûrement beaucoup sur la nature profonde de la pensée et de la sensibilité humaine. A la question que pose la sous titre ci-dessus, certains répondent *oui* (parmi eux Paul Langevin, dont le titre de cette section reprend une maxime, pour la transformer en interrogation). Mais nous n'allons pas nous attarder explicitement à de telles questions générales. Ni non plus à la question de savoir si nos monstres devenus laboureurs sont libres ou esclaves. Mon but va être simplement de survoler quelques applications, aussi intuitives qu'inattendues, que je viens de donner à des mathématiques réputées parmi les plus ésotériques qui soient. Cette tâche sera facilitée par l'illustration.

D'apollonius de Perge à Kepler.

A titre de prélude, rappelons une vieille histoire qui ne concerne pas des monstres, mais des gentilles bêtes élévées et dressées pour le jeu. Les Grecs, qui avaient sans doute découvert les coniques "à l'état sauvage" dans les cones ou cylindres brisés de travers, ne les avaient cultivées que par pur jeu de l'esprit. Quel étonnement donc, quinze siècles plus tard, quand Képler est contraint et forcé de conclure que la trajectoire de la planète Mars est elliptique, et que Galilée trouve que celle de la chute des pierres vers la Terre est parabolique! Galilée proclame que "le grand livre (de la nature) ... est écrit en langage mathématique, dont les caractères sont les triangles, les cercles et d'autres figures géométriques; ... sans les connaître on erre en vain dans un sombre labyrinthe." Newton confirme la mathématique dans son rôle de Reine des Sciences, et lui donne pour première tâche d'étendre l'alphabet géométrique de la nature.

De Lobatchevsky et Bolyai a Poincaré et Einstein.

Les vrais "monstres" mathématiques ne naissent qu'au dix neuvième siècle, au cours de deux révolutions successives contre Euclide. La première, et la mieux connue, est celle de Lobatchevsky-Bolyai et de Riemann. Elle ne touche pas aux catégories implicites dans les première propositions des *Eléments:* ligne, surface, etc.... Elle ajoute même de nouveaux livres d'Eléments, puisqu'elle laisse la dimension croître à 4, ou même prendre toute autre valeur *entière.* Ces novateurs ne s'attaquent qu'au cinquième postulat, celui qui concerne les parallèles; en le niant de deux façons distinctes, ils créent deux géométries monstrueuses.

On sait que l'idée est déjà envisagée au XVIII^{e}, par G. Saccheri et J.H. Lambert, mais que le newtonisme régnant étouffe leur élan. La suite est encore mieux connue. On sait que le grand Gauss, par crainte des Béstiens (comme il l'écrit un ami) étouffe sa découverte de la géométrie hyperbolique, et l'on connait l'extrême émoi que son triomphe provoque parmi les géomètres et les philosophes. Un profond gouffre parait briser l'unité de la "philosophie naturelle" des Newton et des Leibniz. Puis la géométrie plane non-euclidienne de Riemann s'interprète de façon classique il suffit de changer les étiquettes sur une géométrie euclidienne d'arcs de cercle sur la sphère, et Henri Poincaré montre que la géométrie de Lobatchevsky-Bolyai peut également s'obtenir en changeant les étiquettes placées sur une géométrie euclidienne d'arcs de cercle dans un cercle. Le point de vue conventionaliste de Poincaré est près de "récuperer" la première révolution. Puis, ses fruits se révèlent être les outils rêvés pour la théorie de la relativité, et la révolution s'épuise, triomphante et absorbée par une philosophie naturelle élargie.

On en vient même, en relisant attentivement les auteurs anciens, à s'apercevoir que W.K. Clifford, Simon Newcomb et K. Schwartzschild avaient vite conçu la possibilité de physiques non-euclidiennes. J.D. North le signale dans *The Measure of the Universe* 1965, Section 5.2, et S. Bochner (dans *Rice Institute Studies* 1978, p. 34) cite Newcomb longuement.

Centenaire de la deuxième révolution antieuclidienne.

Entre temps, il y a juste cent ans aujourd'hui même, le 20 juin 1877, celui qui allait devenir l'un des plus grands faiseurs de monstres de tous les temps, Georg Cantor, envoie une longue lettre à son fidèle confident Richard Dedekind. Il lui avoue ses inquiétudes quant à la validité du concept même de dimension. Il lui semble avoir démontré qu'un carré ne contient pas plus de points que chacun de ses côtés! Pis: l'intuition et l'école disent qu'il faut deux nombres pour déterminer la position d'un point dans le carré, mais Cantor démontre qu'un seul nombre suffit. Et s'exclame, quelques mois plus tard: “Je le vois, mais je ne le crois pas.” Dedekind ne tarde pas à montrer que le concept de dimension survit à cette attaque. Cependant, les ramifications de cette discussion marquent le passage vers ce qu'on devrait appeler la deuxième révolution anti-euclidienne. Elle ne se satisfait plus de contester des “détails” tels que le parallélisme, mais s'attaque aux premières lignes même des *Elements*. La révolution s'amplifiant, Cantor se voit conseiller par Mittag-Leffler d'imiter la discrétion de Gauss et de ne pas chercher à public.

Ces résultats sonnent-ils, cette fois pour de bon, le glas de la “philosophie de la nature” unifée? Tout le monde parait en convenir, ceux que le fait déçoit tout comme ceux qu'il soulage.

En 1890, Giuseppe Peano livre à la dimension un nouvel assaut. Il décrit une suite de polygones qui paraissent tout à fait innocents, mais se trouvent remplir un carré de façon progressivement plus serrée, de telle sorte que leur limite passe par tout point dudit carré! Un comble! Que pourrait-on concevoir de plus extravagant, éloigné de l'intuition sensible et dénué d'utilité?

Jusqu'à hier, les réactions suscitées par cette découverte avaient été unanimes. Pour les résumer, en même temps que ma contre-thèse, je ne peux faire mieux que de citer M. Freeman J. Dyson. “Une grande révolution dans les idées sépare les mathématiques classiques du 19^{e} siècle des mathématiques modernes du 20^{e}. Les mathématiques classiques étaient enracinées dans les structures géométriques régulières d'Euclide et les évolutions dynamiques continues de Newton. Les mathématiques modernes commencèrent avec la théorie des ensembles de Cantor et la courbe remplissant le plan de Peano. Historiquement, cette révolution fut forcée par la découverte de structures mathématiques qui échappent aux moules d'Euclide et de Newton. Ces nouvelles structures étaient considérées par les mathématiciens de l'époque comme ‘pathologiques’, comme des ‘monstres’ apparentés à la peinture cubiste et la musique atonale qui bouleversaient les canons du goût artistique vers la même époque. Les mathématiciens qui créèrent ces monstres les considéraient comme importants parce qu'ils démontraient que le monde des mathématiques pures inclut une richesse de possibilités allant bien au délà des structures simples qu'ils voyaient dans la nature. Les mathématiques du vingtième siècle fleurirent dans la croyance qu'elles étaient allées complètement au délà des limitations que leur avaient imposées leur origine dans les sciences de la nature.

“[L'auteur des *Objets fractals*]. nous montre que la nature avait joué une blague aux mathématiciens. Ceux du 19^{e} siècle avaient manqué d'imagination, mais pas la nature. Les exemples pathologiques que les mathématiciens avaient inventés pour se libérer du naturalisme du 19^{e} siècle se révèlent désormais être inhérents à des objets familiers qui nous entourent. Nous n'avons pas à aller loin pour les chercher: ‘les monstres de Lebesgue-Osgood sont la substance même de notre chair’.”

Dompter le monstre de Peano.

En fait, mon premier thème est que les courbes approchées de Peano ne peuvent être des monstres, car *elles ont l'utilité d'être belles.* Plus précisément, celles qui servaient vers 1900 à remplir le carré ou le triangle ne l'étaient pas vraiment, mais parmi celles qu'on invente depuis que J.E. Heighway a relancé la mode en mettant au monde les courbes qu'il qualifie de “dragons”, il y en a qui ne peuvent manquer de plaire à qui les contemple sans s'inquiéter de leur message. La figure 2 introduit, à titre d'amusette, deux courbes de Peano épaissies en colliers.

Mais l'essentiel est ailleurs. On nous affirmait que la courbe de Peano ne peut être appréhendée qu'à travers l'analyse logique, et que l'intuition et l'eoeoil nous aurait égarés. En fait, les auteurs de ces réactions unanimes auraient mieux fait d'exercer leur intuition et leurs yeux.

La fig. 3 nous en donne la raison: elle montre une suite d'approximates de Peano, faites de petits arcs de cercle, et remplissant un contour plus intéressant qu'un carré. Je me flatte de l'avoir conçue, car elle illustre sans discours ma thèse que des objets équivalents à *la courbe de Peano nous avaient toujours*

Figure 2. *Colliers péaniens.* Ces diagrammes sont (je l'espère) plus décoratifs que les ancêtres des années 1900, la méthode de construction est moins evidente que, p. ex., sur la figure 4. Toutefois, j'ai modéré ma fantaisie, car ici le but principal est de montrer l'avantage qu'il y a, dans la mesure du possible, à remplacer les courbes de Peano – ou plus précisément leurs polygones approximants – par des colliers. En effet, mettre un triangle en correspondance avec un collier, de plus en plus "effilé" mais d'aire constante, se conçoit bien mieux que de le mettre en correspondance avec une courbe, de longueur indéfiniment croissante. Pour mesurer un polygone approximant de façon intrinsèque, il ne faut donc pas ajouter les longueurs de ses côtés, mais les carrés desdites longueurs. La mesure ainsi obtenue est proportionnelle à l'aire que nos courbe et collier remplissent asymptotiquement.

été familiers. Ce sont des treillis de plantes, des réseaux de rivières, et des coupes de cerveau. On peut en faire l'image idéalisée de formes naturelles si nombreuses qu'on n'a même pas besoin d'en dresser une liste. Désormais, la courbe de Peano elle-même ne peut manquer de devenir un outil de base de la morphologie mathématique.

Suivre les rives d'un fleuve et dessiner un arbre.

Pour préciser, notons tout d'abord que la coutume interdit aux approximantes de Peano de s'intersecter. De plus, comme dans les approximantes que nous illustrons dans cet article, il y a moyen d'éviter des points où deux bouts distincts seraient en contact sans se couper. Cela dit, les applications nouvelles des courbes de Peano passent par l'observation que voici: A toute approximante de Peano sans point double, on peut associer deux "arbres" approximants ou deux collections d'arbres) tels que leurs limites remplissent le même domaine du plan que la courbe elle-même. Il est loisible, en première approximation, de concevoir l'une ou l'autre collection d'arbres approximants comme étant un réseau fluvial que l'on aurait tronqué en effaçant les branches en deçà d'une certaine taille, et de concevoir la collection restante comme réunissant les lignes de partage des eaux du même réseau fluvial. De cette façon, une approximante de Peano se trouve réinterprétée comme courbe suivant la rive cumulée de tous les cours d'eau d'un tel arbre approximant; on peut lui imposer de rester à mi-chemin de l'arbre approximant des lignes de partage des eaux. De cette façon, le passage d'une approximante aux suivantes d'une même séquence équivaut simplement à compléter ces réseau de Peano par des branches de plus en plus fines.

La transformation d'une courbe de Peano en un tel arbre –. dit intrinsèque –. est basée sur un algorithme sans ambiguïté, dont un exemple est illustré par la figure 4. L'idée sousjacente est tout à fait intuitive. Imaginons que l'on parte d'une boucle fermée tellement entortillée qu'elle réussit à passer à moins de 1 mètre de tout point d'un certain domaine du plan. Plaçons tout le long de cette courbe un mur très mince (il doit être suffisamment mince pour éviter tout contact provoquant la formation d'une sous-boucle). Ensuite, remplissons d'eau la piscine baroque ainsi construite. Puis faisons sauter un morceau de notre mur, situé en un point où notre courbe initiale touche la frontière extérieure du domaine qu'elle va remplir. Il est bien clair que l'eau, en s'échappant, nous tracera un fleuve avec toute une série d'affluents.

Et la réciproque est vraie, elle aussi. Supposons qu'un fleuve et des affluents (que l'on imagine dans ce contexte, réduits à des courbes sans largeur) drainent un pays sans former de boucle et en passant à moins de (disons) 10 kilomètres de tout point. Alors une courbe qui suivrait toutes les rives d'assez près pour éviter tout point double peut servir de première approximante de Peano. Si l'on ajoute des affluents plus petits de façon que le pays soit drainé à 1 kilomètre près, alors une courbe longeant toutes les rives (à une distance moindre) peut servir d'approximante de Peano plus précise. Et ainsi de suite.

La construction d'un modèle ne peut pas refléter toute la realitè naturelle.

Il est indéniable (et le fait a des conséquences de tout ordre) que les rivières sont de largeur positive et que l'inclusion de ruisselets de plus en plus minimes ne peut se poursuivre sans fin, contrairement à la construction péanienne sans fin des mathématiciens. Et, de plus, une courbe péanienne choisie au hasard risque fort, nous allons y revenir dans un instant, d'avoir un réseau intrinsèque trop simple, ou trop tarabiscoté, pour rendre compte de la réalité hydrologique. Mais ne nous hâtons donc pas d'être trop exigeant quant aux détails. L'essentiel, ici, est qualitatif: il me paraît que l'équivalence que je viens de formuler (ainsi que ses nombreuses contreparties dans d'autres sciences de la nature) suffit pour transmuter en quelque sorte la courbe de Peano. Désormais, loin de rester le monstre que l'on avait voulu à sa naissance, on la voit devenir absolument intuitive.

Une idee simple mais puissante: tout petit réseau fluvial n'est qu'une image reduite d'un grand réseau. Figures scalantes.

Soulignons ici un certain aspect commun à presque toutes les variantes de la construction péanienne, à savoir leur caractère *scalant*.

Sans trop y penser et dans un souci évident d'économie –. de pensée, de papier et d'encre –. Peano et ses émules se sont tous arrangés pour eviter de recourir à une nouvelle règle à chaque étape de construction. Pour ajouter des sinuosités au cours de la n^{ieme} étape, on se contente de copier la précédente à une plus petite échelle. Il s'ensuit que tout petit morceau d'une courbe de Peano est de la même forme que divers gros morceaux du tout.

J'aime dire que ces courbes dont des petites et des grosses parties ont la même forme ou structure, mais à des échelles différentes, sont "scalantes". On encore (c'est plus précis, mais bien lourd!) "à homothétie interne".

L'idée générale remonte très loin, au moins à cette lettre que Leibniz écrit au R.P. des Bosses "[Dans]. *l'exemple* du corps humain ou d'un autre animal ... toute partie quelconque, solide ou fluide, contient en elle-même, à son tour, d'autres animaux et végétaux. Et je pense que cela doit être itéré à propos de toute partie quelconque de ces derniers vivants, et ainsi à l'infini.... Je me sers d'une *comparaison:* imaginez un cercle; inscrivez dans ce cercle trois autres cercles égaux entre eux et de rayon maximum; en chacun de ces nouveau cercles et dans l'intervalle entre les cercles, inscrivez de nouveau trois cercles égaux de rayon maximum, et imaginez que le processus en question aille à l'infini."

Pourquoi citer ce texte, dont la biologie prête à sarcasme? Parce que l'histoire de la pensée abonde en idées nées dans un context défavorable, puis survivant au purgatoire pour être repriser et s'enraciner ailleurs, utilement et pour de bon. Le concept du scalant en donne un exemple, et je lui vois la vertu toute particulière de s'être enraciné, tout à fait indépendamment, dans des traditions aussi éloignées qu'il se peut l'une de l'autre: il a été adopté par Peano, Cantor et leurs émules pour créer des monstres, mais aussi par un nombre de plus en plus grand de physiciens très concrets.

Le fait qu'il ait fallu près de cent ans pour que ces deux traditions se reconnaissent et se fondent (par mes soins) souligne encore (s'il le faillait) l'effet de la passion destructrice qui pousse chaque hameau de la pensée à s'isoler des autres mais passons.

En géométrie euclidienne, nous savons très bien que la droite est scalante, car tout agrandisement est superposable sur l'original ... d'une infinité de façons. L'intérêt de ce fait fut reconnu par Leibniz (!), qui songea un instant (dans son opuscule plu commen *De Euclidis* p.?.?.t.a.) à s'en servir pour définir la droite. La spirale logarithmique n'est scalantes que de façon partielle et limitée à un seul point, car il faut faire coïncider les origines de l'original et de l'agrandissement. Parmi les courbes standard bien lisses, c'est à peu près tout, mais des trésors innombrables d'autres courbes scalantes s'ouvrent à qui veut admettre des courbes très irrégulières en *tous* leurs points, ou, tout au moins, en "beaucoup" de points. Je dis bien: quiconque croit à l'utilité du scalant, mais ne vaut pas se contenter de droites, n'a pas le choix: il lui faut admettre l'irrégulier.

Figures intermédiaires et "monstres".

Quant au savant, il ne se mesure pas à l'irrégulier pas fantaisie, mais forcé par la Nature. Ses prédécesseurs ayant bient travaillé, les problèmes géométriques que la Nature inspire ou impose ont de plus en plus tendance à être très compliqués. C'est pourquoi, sans se donner le mot, de très divers savants contemporaires à la recherches de modèles aux courbes et surfaces naturelles les plus irrégulières se surprennent à rêver de figures intermédiares, d'êtres géométriques qui ne seraient ni courbes, ni surfaces, ni volumes, tout en empruntant à chacune de ces catégories. Sachant que ce rêve est futile en géométrie d'Euclide, nous voyons qu'il revient à souhaiter qu'il existe une autre géometrie qu'il “suffirait” d'identifier et d'appliquer. On l'espère originale ... mais sans excès!

Qu'il est curieux de voir ainsi des hommes très pratiques, que nul ne croirait contaminés par les classiques grees, retrouver le vieux thème mythologique des chimères.

Dans les faits, nul ne réussit à identifier de telles figures intermédiares, sauf moi, et celle que je proposai fut d'abord jugée orignale jusque'à l'extravagance, car elle était empruntée. Aux faiseurs de monstres d'il y a cent ans! J'étais familier de l'ensemble triadique que Georg Cantor avait introduit en 1884, et je conclus en 1962 qu'un certain problème de physique appliquée qui m'avait attiré ne pouvait aboutir qu'à travers une forme randonisée dudit ensemble!

Puis je conclus en 1967 que, pour représenter l'irrégularité des côtes maritimes, il faillait une forme randonisée d'une courbe réputée monstrueuse qui avait été créerpar Helge von Koch en 1904, la courbe en “flocon de neige”, et dont la construction est décrite par la figure 5.

L'ensemble de Cantor est intermédiare entre le point et la droite, et la courbe de Koch entre la droite et le plan, et pendant la période qui suivit leur “invention” mille et une autres manières d'être intermédiaire furent identifiées par les mathématiciens. Elles ne sont pas passées inaperçues, l'ironie et le sarcasme que souleva l'ensemble de Cantor en témoignent. Et, comble de malchance, les mathématiciens foncèrent vite vers une généralité accrue, et traitèrent leurs monstres de 1900 de façon peu civile: comme des mouchoirs que l'on n'utilise qu'une fois avant de les jetes. En particulier, nul ne les considéra comme suffisamment importants pour éprouver le besoin d'un terme générique pour les désigner –. jusqu'à ce que mes travaux me forcent à les baptiser, en forgeant le terme *fractales*.

La dimension fractale.

Pour définir ce dernier terme, précisons un peu les déchirements que la célèbre lettre du 20 juin 1877 provoqua parmi les mathématiciens. On sait qu'ils conduisirent à dégager le concept de dimension topologique, que je dénote par D_T, tout en sauvegardant l'idée intuitive qu'un carré est “plus riche en points” que ses côtés. Mais ce n'est pas tout: on fut obligé de reconnaître que la dimension n'est nullement une notion unique. A sa place émergea tout un faisceau de concepts, distincts mais connectés entre eux: D_T en est exemple particulièrement simple et universel mais il y a un autre aspect très flexible du concept de dimension. Classiquement, on peut découper un parallélépipède à D dimensions en N sous-parallélépipèdes en divisant chaque arrête en K parties égales. Il faut donc que $N=K^D$. Le rapport d'homothétie entre tout et parties est r=1/K. On a par conséquent: .ce D = log N/log (1/r). Pour le contour polygonal de von Koch, r=1/3 et la construction substitue à chaque segment un système de N=4 segments. On a donc D=log4/log3=1,2618, valeur intermédiaire entre 1 and 2! Le caractère strictement scalant de la courbe de Koch nous à permis un accès direct au concept de dimension non entière, mais il s'étend à des figures qui ne sont scalantes que du façon statistique. On en trouve du exemples dans diverses courbes et surfaces aléatoires.

Une forme plus générale du concept de *dimension fractale* D sugit en 1919 sous la baguette de Felix Hausdorff (assisté bientôt de A. S. Besicovitch). On n'en jasa pas, car il resta quasiment secret, mais que voilà encore une bête étrange! C'est en général une fraction, ce qui fait dire aux mathématiciens que l'ensemble de Cantor est de dimension D=0,6309 et le flocon de Koch est de dimension D=1,2618. Et c'est ainsi que j'ai proposé que l'on dise que tout ensemble satisfaisant à $D>D_T$ est un *ensemble fractal.*

De la géométrie à la théorie.

L'esquisse que tente cet article ne peut se prolonger. Nous avons eu le loisir de tenter une très brève “défense et illustration” de l'importance *pratique* des monstres de Cantor, de Peano et de leurs émules (au sens moderne comme au sens classique du terme *illustration*!). Illustrer et défendre la dimension fractale est malheureusement une tâche autrement complexe, car cette notion répond à une question qui ne semblait même pas digne d'être posée. Le fait de base, l'existence de nombreuses figures irrégulières et fragmentées dans la nature, ne paraît guère contestable. Mais que le degré d'irrégularité et de fragmentation est mesurable non seulement ne s'imposait pas, mais continue d'exiger, pour être acceptée, des développements qui dépassent de loin le cadre de ce texte.

Pour qu'une science fasse place à des monstres repentis, un simple coup de baguette ne peut suffire. Au contraire, nos contes n'en finissent jamais de discuter la beauté et l'utilité, et même la légitimité de leurs héros et de leurs descendants. En particulier, la simple description géométrique du monde ambiant reste éternellement sujette à controverse. On félicite le géomètre pour avoir contribué à la description des faits, mais on lui reproche aussitôt de ne pas avoir réussi le miraclede fournir en un clin d'oeil la réponse à des problèmes posés depuis toujours. Ne craignons donc pas de clore ce texte sur le ton adopté au départ, en disant simplement que l'union heureuse des idées que nous avons introduites ici a déjà donné naissance à beaucoup de résultats et à d'autres idées.

Pour en savoir plus:

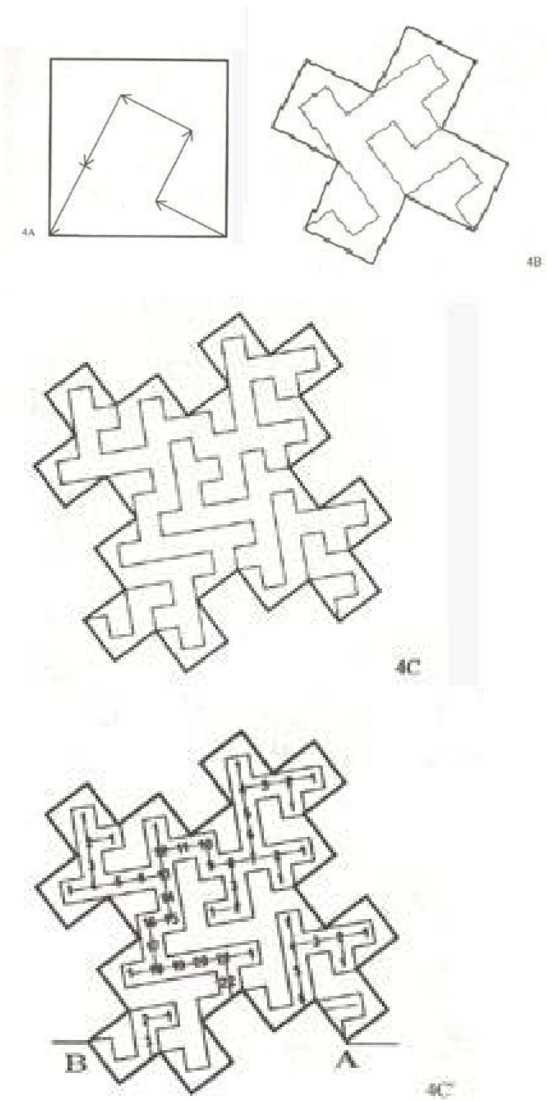
• La *Correspondance de Cantor et de Dedekind* a été traduite dans J. Cavaillès, *Philosophie Mathématique*, Hermann 1962. L'original avait paru chex Hermann en 1937. Des compléments et des commentaires se trouvent dans R. Dugac, *Richard Dedekind*, Vrin 1976. • Pour connaître les travaux de Cantor, de Peano de Koch et de leurs émules, le praticien dispose d'une infinité de traités mathématiques modernes. Mais le non praticien ferait mieux de les éviter au bénéfice de ceux des années 1900-1925. Il trouvera que, du point de vue de la présente discussion, la qualité d'un exposé peut se mesurer au nombre d'illustrations. Un traité apprécié en son temps, dû aux époux Young, a été réimprimé: W. H. Young et G. C. Young, *The theory of sets of points*, Cambridge University Press, 1906, Chelsea, 1972. • Pour la théorie de la dimension, voir W. Hurewicz et H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press. 1941. • L'auteur a exprimé ses thèses en cette matière dans son ouvrage: B. Mandelbrot, *les Objets fractals: forme, hasard et dimension*, Flammarion, 1975. • Chacune des deux éditions successives en langue anglaise, inclut des remaniements considérables: elles sont plus développées et mieux illustrées. Leur bibliographie est très détaillée: B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance and dimension*, W.H. Freeman, 1977 et 1980. • Pour les applications à l'anatomie et à la turbulence, une référence commode de caractère général est mon article dans *La Recherche*, janvier 1977. (Dont il faut, bien entendu, omettre certaines portions, que le présent texte reprend et développe.) Une autre référence commode est l'article de Martin Gardner dans *Pour la science,* juin 1977.

Legendes.

Figure 1. *La lettre de Cantor à Dedekind du 20 juin 1877.* Le troisième alinéa de cet extrait a ainsi été traduit par J. Cavaillès, "Il s'agit de montrer que les surfaces, les volumes et même les variétés continues à ρ. dimensions peuvent être mis en correspondance univoque avec des courbes continues, donc avec des variétés à une seule dimension et que les surfaces, les volumes, les variétés à ?. dimensions elles aussi ont donc la même puissance que les courbes."

Figure 3. *Une nouvelle courbe de Peano.* Ici, les approximantes constituent des frontières entre des domaines blanc et noir. L'approximante 3B comporte 13 arcs de cercle de 60'•o, de rayons variables. Leurs "traces" sont très visibles sur

l'approximante 3C, où chaque arc de 3B est remplacé par une version réduite du tout. Ces versions sont “en positif” sur les arcs convexes (comme ceux de la partie supérieure de 3B), et “en négatif” sur les arcs concaves. Donc 3C comporte 13^2 arcs, etc.



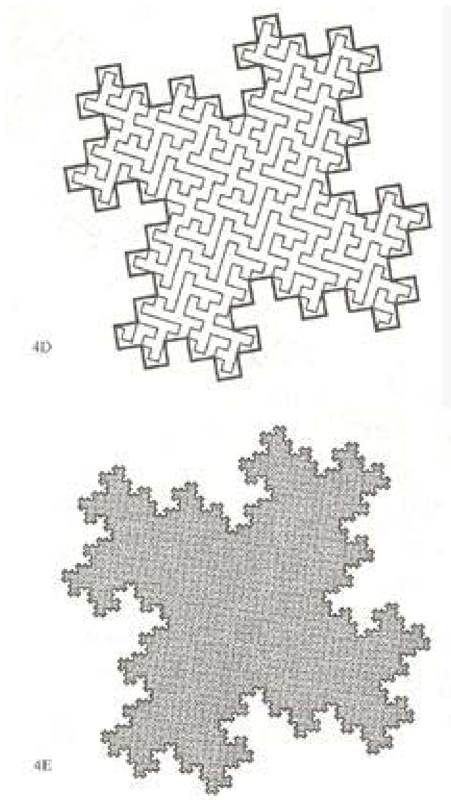


Figure 4. *Courbe de Peano, et construction de l'“arbre des rivières”.* Les approximantes que voice sont plus traditionnelles que celles des figures 2 et 3. Ce sont des polygones à nombre croissant de côtés (“téragones” dans ma terminologie), dont chacun est tracé sur un réseau orthogonal de lignes parallèles équidistantes. Considérons les mailles de ce réseau qui touchent ce téragone à sa droite, en allant de A à B. Les “culs-de-cas” ayant trois côtés en commun avec le téragone sont marqués du nombre 1. En une première étape de construction bdes rivières, les trois petits pas qui contournent chaque cul-de-sac sont remplacés par un seul pas direct. En même temps, on trace un petit “cours d'eau” allant du centre du cul-de-sac vers le raccourci, et de longueur égale aux côtés des carreaux. On répète l'opération en partant du téragone raccourci, dont les culs-de-sac sont marqués du nombre 2. Et l'on continue jusqu'à ce qu'on aboutisse à un téragone dèpourvu de cul-de-sac. Les petits cours d'eau se joignent spontanément en un ou plusieurs arbres. Si l'on procède de même avec les mailles à gauche du téragone, on

obtient des arbres de lignes de partage des eaux.

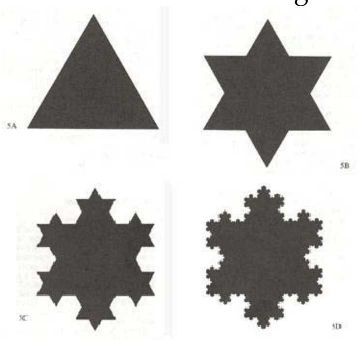


Figure 5. *Courbe de Koch ("flocon de neige").* Pour en construire le tiers inférieur, on part d'un segment de longueur a, que l'on divise en trois. On substitue au segment du milieu deux segments formant avec lui un triangle équilatéral. On recommence la même opération avec les segments de longueur a/3, a/9, a/27, etc. ... La longueur de la ligne brisé ainsi obtenue (un "téragone") est $a(4/3)^n$, n étant le membre de générations de triangles équilatéraux, donc elle augmente indéfiniment avec n. Mais le contour lui-même tend vers une courbe limite, qui n'est autre que la limite de l'enveloppe des approximantes de la figure 3. (En décrivant la courbe de Koch dans *La Recherche* de 1977, j'avais bien tort d'affirmer qu'elle ne pouvait s'obtenir comme enveloppe péanienne!)

Quelques néologismes

C'est par nécessité que mes travaux semblent regorger de néologismes car, si les idées de base sont anciennes, elles avaient été si peu utilisées qu'on n'avait pas éprouvé le besoin de termes pour les désigner, ou qu'on s'était contenté d'anglicismes ou de termes hâtifs ou lourds ne se prêtant pas aux larges usages que je propose.

Amassement, n.m. Aptitude à former des amas hiérarchisés. Collection d'objets formant des amas distincts, groupés en sur-amas, puis sur-sur-amas, etc., de façon (tout au moins en apparence) hiérarchique.

Fractal, adj. Sens intuitif. Dont la forme est soit extrêmement irrégulière, soit extrêment interrompue ou fragmentée –. quelle que soit l'échelle d'examen. *Remarque*: le masculin pluriel est *fractals*, calqué sur navals, de préférence à *fractaux*.

Fractale, n.f. Configuration fractale; ensemble ou objet fractal. *Remarque*: Puisque mon pluriel *fractals* prête à quelque controverse, il paraît bon que le nominatif correspondant soit féminin.

Dimension fractale, Dimension au sens de Hausdorff et de Besicovitch. Nombre qui sert à quantifier le degré d'irrégularité et de fragmentation d'un ensemble. La dimension fractale n'est pas nécessairement un entier.

Ensemble fractal, Ensemble dont la dimension fractale est égale ou supérieure à sa dimension ordinaire (topologique).

Objet fractal, Objet naturel qu'il est raisonnable et utile de représenter mathématiquement par un ensemble fractal.

Randon, n.m. élément aléatoire. Ceci n'est pas un anglicisme! On ne sait pas assez que l'anglais *random* provient de l'ancien français *randon*, "rapidité, impétuosité". Je propose qu'on le ressuscite sous le nouveau sens que je suggère.

Randoniser, v. tr. Introduire un élément de hasard. Randoniser une collection d'objets: remplacer leur ordre d'origine (qui pouvait, par exemple, être alphabétique) par un ordre choisi au hasard; souvent, tous les ordres possibles se voient attribuer la même probabilité.

Scalant, adj. Se dit d'une figure gémétrique ou d'un objet naturel dont les parties ont la même forme ou structure que le tout, à ceci près qu'elles sont à une échelle différente. *Remarque:* Le terme usuel ici est l'emprunt *scaling,* qui est gênant mais si près d'être enraciné qu'il vaut mieux ne pas trop s'en éloigner en cherchant un néologisme de remplacement.

Teragone, n.m. Polygone à très grand nombre de côtés. Ce terme est formé à partir du grec teras = monstre ou merveille, sans oublier que *téra* désigne 10^{12} dans le système métrique, dont il est aujourd'hui le préfixe ultime. *Remarque:* Il aurait été fâcheux que giga = 10^9 serve de prétexte à gigagone.