Proceedings of Chelyabinsk Scientific Center / Issue 3 (29), July - September 2005

Известия Челябинского научного центра, вып. 3 (29), 2005

ЮБИЛЕЙ

УДК 51.091+514

ОН ОСТАВИЛ ЦАРАПИНУ НА ПОВЕРХНОСТИ ВСЕГО: К 80–ЛЕТИЮ БЕНУА МАНДЕЛЬБРОТА

В.А. Шлык

e–mail: v_shlyk@hotmail.com; vshlyk@bspu.unibel.by

Белорусский государственный педагогический университет, г. Минск, Беларусь

Статья поступила 7 октября 2005 г.

В феврале 1990 года австралийская газета «Аустралиан» [7] сообщала: «В Сиднее на конференции по теории хаоса в Университете Нового Южного Уэльса профессору Мандельброту был оказан прием, который по большему обыкновению предназначался поп–певцам. <…> Более 2000 людей, пытавшихся втиснуться в аудиторию Джона Кламси, изрядно потрепали организаторов публичной лекции профессора Мандельброта. Организатор мистер Алекс Оупай находился в состоянии близком к отчаянию, когда он оправдывался и всеми правдами и неправдами умолял толпу освободить проходы и входы. В конце концов, конференция началась приблизительно с 15–тиминутным опозданием. Борясь с простудой и отвратительной акустикой, профессор Мандельброт извинялся: «»Я вовсе не собирался устраивать беспорядок.» <…> В некоторой степени профессор Мандельброт должен был винить себя самого. Желая того или нет, он стал олицетворением хаоса, подобно тому, как Эйнштейн олицетворяет относительность.»

20 ноября 2004 года Бенуа Б. Мандельброту, почетному члену корпорации IBM, Стерлинг–профессору Йельского университета, доктору многих других университетов, обладателю научных премий и наград, исполнилось 80 лет.

Бенуа Мандельброт изменил парадигму восприятия хаоса. Он показал, что хаос и сложность могут возникать в результате действия простых законов и правил. Введя понятие фрактала и продемонстрировав универсальность фрактальных структур в природе, Мандельброт создал математику для их описания. Фрактальная геометрия предоставила метод для выделения порядка и простоты в многообразии хаоса, который до этого выглядел неприступным. Сформировалась родственная теории фракталов геометрия хаотического детерминизма. Человек получил возможность «прояснить хаос тех посланий», которые он воспринимает посредством своих органов чувств [36].

Новый подход привел к переоценке роли случая в поведении сложных процессов и открыл возможности для создания новых теорий и технологий в различных областях. Возрождение Мандельбротом эксперимента и графических представлений в математике привело к фундаментальным открытиям и гипотезам, часто неожиданным и в высшей степени сложным. Красота фракталов выявила новые закономерности эстетической гармонии мира, которую другими, неформальными средствами исследуют художники, архитекторы и композиторы.

Фракталы, хаос и новая геометрия

30 лет назад фракталов не было. 20 лет назад они стали предметом яростных научных дискуссий. В одном только 1990 году было опубликовано 5000 статей со словом «фрактал» в названии. Для многих фракталы означали революцию в науке. Сейчас не знать, что такое фракталы, стало неприличным, хотя нередко их отождествляют с интригующими цветными картинками с загадочным и сложным узором, не догадываясь, какая серьезная и необычная математика за ними скрыта. Необычная, несмотря на то, что ее основные идеи доступны каждому. Мы видим фракталы в деревьях, звездном небе, реках и морских побережьях, горах и облаках. С геометрической точки зрения, наши легкие и почки, кровеносная и нервная системы тоже фракталы. Говоря упрощенно, фракталы — это все, что изломано и пористо, разветвлено, измято и разорвано, причем остается таким как пристально мы бы в эти объекты ни вглядывались. Дерево состоит из веток и веточек, облако — из меньших облачков, заливы — из бухт, и так много раз, почти бесконечно. Беря все более и более сильный бинокль, мы видим заливы между скалами, камешками, песчинками. Суть фракталов в самоподобии: их геометрическая структура остается приблизительно той же в любом масштабе рассмотрения.

Значит, фракталы существовали и раньше? Да, как принцип устройства мира, они существовали всегда, хотя понятие фрактала появилось совсем недавно, когда было понято, что самоподобие — универсальное свойство природы. Обнаружил это математик Бенуа Мандельброт. Он же ввел в жизнь и новый термин «фрактал». В пересказе Глейка [11][1] это происходило так. «Однажды ближе к вечеру, зимой 1975 г., готовя к публикации в виде книги свою первую большую работу, Мандельброт пришел к выводу, что для своих образов, своих размерностей и своей геометрии ему необходимо иметь имя. Непроизвольно он стал просматривать латинский словарь своего сына, который уже вернулся из школы, и наткнулся на прилагательное *fractus*, производное от глагола *frangere*, ломать. Созвучие с основными однокоренными английскими словами *fracture* и *fraction* показалось подходящим». Так Мандельброт изобрел слово «фрактал».

В [20] Мандельброт не стал давать окончательное определение фрактала, «чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет «разлито по бутылкам» [35]. Он поясняет: «Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моем представлении обладали свойством быть «нерегулярными, но *самоподобными*». Слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий» [35]. Широкое толкование позволяло включить в число фракталов давно известные в математике множества Кантора, Коха, Серпинского, Пеано, Жюлиа и др. Эти конструкции противоречили интуиции, их считали монстрами — удивительными, но досадными исключениями. «Встречаясь с этими образами, математики и ученые закрывали глаза» [5], поскольку из–за их нерегулярности, почти хаотичности, Евклидова геометрия не могла с ними справиться. Именно эта *почти* хаотичность, хаотичность в пределах самоподобия, была тем, что хотел выразить в новом понятии Мандельброт. "Моя атака в новой области, — пишет он, — имела целью разделить на части понятие *хаоса*. Одна часть при этом так и осталась нетронутой, поскольку мы не знаем, как ее исследовать. Вторая же, хотя и менее общего вида, но весьма внушительная, заслуживает быть выделенной. Ее следовало бы изучить, хотя бы в силу многочисленности примеров самоподобия в природе, а еще потому, что именно из–за самоподобия она вполне поддается изучению» [35].

Первоначальное, «тактическое» определение фрактала, опиралось на классическое представление о хаусдорфовой размерности[2]. Мандельброт назвал фракталами множества, хаусдорфова размерность которых строго больше топологической (и обычно оказывается нецелым числом), но уже во втором издании книги [34] он от этого определения отказался [36]. И все же

---

[1] Перевод на русский язык посвященной Б. Мандельброту и фракталам четвертой главы книги Глейка, следует читать с осторожностью. Оригинал замечательный, но перевод безобразен, иногда до потери смысла (СПб, Амфора, 2001). Поправки и комментарии можно найти в [39].

[2] Другое название — размерность Хаусдорфа—Безиковича. Феликс Хаусдорф ввел это понятие в 1919 г., а Абрам Безикович привел его в окончательный вид. Сведения о многих математиках, причастных и не причастных к созданию фрактальной геометрии, можно найти на сайте университета Сент–Андрюс [28].

он с самого начала оставил возможность для расширения понятия, ибо размерность по Хаусдорфу не выражала полностью его интуитивное понимание фракталов. Она позволяет различать категории «гладкий» и «хаотичный», но не разделяет категории «нерегулярный, но самоподобный», то есть хаос, поддающийся изучению, благодаря фракталам, и «геометрически хаотичный», то есть хаос вовсе беспорядочный [35].

Новая математика, нацеленная на изучение не вполне определенного понятия, не была сразу принята. Если Мандельброт «развил в себе интуитивное понимание» хаусдорфовой размерности, и его «интуиция всегда работала с различными формами более общей концепции» — концепции фрактальной размерности, то для большинства математиков это понятие «было каким угодно, но уж никак не интуитивным, а фактически весьма туманным» [35]. Использование дробной хаусдорфовой размерности в 1975 г. шокировало ученый мир. Только в 1982 г., после выхода в свет новой книги Мандельброта, научного эссе «Фрактальная геометрия природы» [34], пришло понимание того, что родилась новая наука.

С тех пор началось бурное развитие фрактальной геометрии. Фракталы обнаружили практически во всех естественных явлениях и процессах. «Сейчас анализ на фрактальных множествах развит в той же мере, что и анализ на гладких многообразиях,» — говорит Р. Стричартц, профессор американского университета Корнелл, см. [27]. Идеи и достижения новой геометрии нашли самые разнообразные приложения. Фрактальные модели применяют в медицине для ранней диагностики раковых опухолей; в геологии и почвоведении; в материаловедении при изучении процессов разрушения изделий; в ядерной физике и астрономии для изучения элементарных частиц, распределения галактик во Вселенной, процессов на Солнце; в информатике для сжатия данных и улучшения трафика в сети Интернет; для анализа колебаний рыночных цен в экономике, сердечного ритма в кардиологии, погоды в метеорологии; в химии, искусствоведении… — перечень можно продолжать бесконечно.

Всем этим человечество обязано математику Бенуа Мандельброту. То, что новую науку со столь широкими приложениями создал один человек, выглядит невероятным. В наше время все значительные достижения науки и технологий являются плодами работы коллективов. Время одиночек–энциклопедистов прошло, специализация достигла такой степени, что одному человеку не под силу охватить даже основные идеи из разных областей. Для этого надо быть гением. Но многие так и считают: открыв фракталы, Б. Мандельброт совершил переворот в физике, утверждают авторы книги «От Ньютона до Мандельброта» [26]. Чтобы разобраться, как это смогло произойти, проследим, какими проблемами занимался Бенуа Мандельброт.

Путь к фракталам

Размышляя об истории создания фрактальной геометрии, Б. Мандельброт выделяет три периода. Первый, период поиска ощупью и вынашивания идеи, длился с 1952 до 1964 г.. Второй, продолжавшийся до 1975 г., во многих отношениях был самый интересный, но в личном плане – наиболее разочаровывающий. Он отмечен серией фрактальных манифестов: выступлении на конгрессе в Иерусалиме [22] и лекциях в Йельском университете и в парижском Коллеж де Франс. Это были попытки «сформулировать широкий замысел, не делающий различия между социальными и естественными науками» [5]. К сожалению, добиться понимания своих идей другими учеными никак не удавалось, отчего возникало чувство отчуждения. Третий период Мандельброт характеризует как время консолидации идей, их бурного и расширяющегося развития, успешного объединения технических и философских аспектов. Для нас наибольший интерес представляют первые два периода.

Бенуа Мандельброт окончил парижскую Политехническую школу в 1947 г.. В следующем году он получил степень магистра по аэронавтике в Калифорнийском Технологическом Институте. Там, изучая явления, сопровождающие полеты на сверхзвуковых скоростях, он познакомился с проблемой турбулентности, «возможно, самой большой загвоздкой физики XIX века» [5]; позднее он свяжет турбулентность и фракталы. Интересовался он и другими проблемами, например, много времени проводил в беседах с биологами. Вернувшись во Францию, он провел год в Военно–воздушных силах [2]. Первые научные работы Мандельброта относятся к 1951 г., а в 1952 г. в Парижском университете он защитил докторскую диссертацию, которая положила начало его междисциплинарным исследованиям. В результате соединения элементов теории информации, психолингвистики и теории вероятностей в диссертации выводились законы статистической структуры языка. В основе лежали работы гарвардского филолога Дж. К. Ципфа, который в 1949 г. эмпирически установил, что в любом достаточно объемном содержательном тексте частоты употребления слов описываются степенным законом. Мандельброт уточнил закон Ципфа и показал, что он следует из принципа наименьших усилий, если предположить, что при передаче имеющегося количества информации (в смысле Шеннона) и говорящий, и слушающий стремятся затратить как можно меньше усилий, минимизировав среднюю стоимость слова. Ципф чувствовал такое объяснение, но не смог дать этой интуитивной идее ясную формулировку или показать, что наблюдаемый закон из нее следует. Генеалогическое родство понятий количества информации и энтропии позволило Мандельброту связать полученные результаты со статистической термодинамикой [36]. О диссертации Мандельброта любопытно отозвался Нобелевский лауреат в области физики А. Кастлер: «в ее первой части речь шла о предмете, который еще не существовал, а во второй — о предмете, который уже не существовал» [1]. Однако не создание математической лингвистики было основной целью диссертации. Более того, даже закон Ципфа был переоткрыт только для того, чтобы снова впасть в забвение. Главным результатом работы было осознание важности степенных законов [14].

Поработав недолго в Филипс Электроникс, Мандельброт отправился в Массачусетский технологический институт, чтобы продолжить исследования в области теории информации, сочетающей идеи алгоритма и случая. Через несколько месяцев Джон фон Нейман, автор математических оснований квантовой механики и отец информатики, пригласил его в знаменитый Институт высших исследований в Принстоне — возможно, он «почувствовал в молодом ученом такую же любовь к риску, как у него самого» [1]. Мандельброт оказался последним пост–доком, которого спонсировал фон Нейман. Следующий грант он получил от фонда Рокфеллера благодаря поддержке одного из основателей теории информации Уоррена Уивера. Лишь много позже Уивер открыл ему, что умиравший тогда от рака «Джонни» просил его «присмотреть» за Мандельбротом, потому что «избранный им стиль жизни опасен и помощь ему может понадобиться» [14]. В Принстоне Мандельброт познакомился с размерностью Хаусдорфа, там же впервые возник его интерес к компьютеру. В 1958 году, после двух лет в Принстоне, женитьбы и четырех лет работы в университетах Женевы, Лилля и Парижа, Мандельброт принял приглашение корпорации IBM и, приехав в США на лето, остался там навсегда. Всемирно известный исследовательский центр IBM в Йорктаун–Хайтс, штат Нью–Йорк, предоставил ему академическую свободу, исследовательскую группу и оборудование необходимое для проверки его идей. В лабораториях центра работали яркие личности, и Мандельброт с радостью окунулся в водоворот новых идей и интересов.

Для IBM Мандельброт исследовал ошибки, возникающие в телефонных каналах связи, используемых при передаче компьютерной информации. Он обнаружил, что ошибки не случайны в классическом смысле. Во времени они распределены не равномерно, а концентрируются в серии — кластеры. Однако распределение ошибок самоподобно — кластеры, в свою очередь, состоят из кластеров, общая картина напоминает пылевидное множество Кантора. Мандельброт показал, что полностью отделаться от ошибок невозможно — они обусловлены природой процесса. В любом промежутке времени всегда найдутся периоды без ошибок и периоды, густо насыщенные ими. Своими исследованиями Мандельброт сэкономил фирме не один миллион долларов — вместо банального и безуспешного повышения мощности сигнала усилия были потрачены на поиск нестандартных методов преодоления шума.

Позже, около 1968 г., Мандельброт откликнулся на вызов одного из своих друзей и взялся за проблему Нила. Она состояла в том, что периоды годовых засух и наводнений чередовались крайне неравномерно и имели различную длительность. Люди давно уже бросили всякие попытки предсказать каким будет в следующем году уровень воды в реке, от которой в течение многих тысяч лет зависела жизнь Египетского царства. Засухи сменялись половодьями, демонстрируя вроде бы некоторую периодичность — «… вот наступает семь лет великого изобилия во всей земле Египетской. После них настанут семь лет голода» [32]. Однако их чередование частенько нарушалось – «… разверзлись все источники великой бездны, и окна небесные отворились; И лился на землю дождь сорок дней и сорок ночей» [32].

Самым известным «нилологом» того времени был англичанин Х. Е. Херст, который проанализировал накопленные за несколько тысяч лет записи о поведении реки. Его загадочные выводы говорили о том, что по записям невозможно указать даже средний уровень воды в Ниле, так же как и точный момент начала или конца засухи. Уровень реки все время колеблется, флуктуирует, каждое событие выглядит как «совершенно случайный шум, наложенный на фон, также полный шума. Основа выглядит циклической, но из ее циклов не удается ничего экстраполировать в предсказательных целях» [5]. Циклы не являются периодическими: иногда длительность засухи превосходит период царствования фараона, а бывает, — они охватывают даже целую династию, что соответствует флуктуациям тысячелетней длины.

Учебники гидрологии не давали подходящей модели для статистического анализа явления. Отказавшись от обычных математических предположений, Мандельброт построил новую модель, включавшую особенности Нила и других рек. С ее помощью были построены графические изображения колебаний реальных и вымышленных рек. Графики перемешали с изображениями колебаний Нила, соответствующих данным Херста, и результатами стандартных моделей и попросили гидрологов отличить реальные графики от имитаций. Со словами «реки так себя не ведут» знаменитый эксперт сразу же забраковал графики, построенные по старым моделям. Но он не смог отличить реальные графики от графиков Мандельброта. Новая модель, исходящая из самоподобия временных рядов, несравненно лучше соответствовала реалиям. «Это было откровение, — пишет Мандельброт. — До этого я не мог убедить практиков рассмотреть «сумасшедшую» математическую идею, стоящую за моей моделью. Но после того как признанный эксперт признал, что моя модель ведет себя как реальная река, я понял, что для того, чтобы различить формы, глаз обладает намного большей силой, чем я ожидал» [5].

Похожая история произошла и с графиками, которые были построены по созданной Мандельбротом модели изменения цен на фондовых и товарных биржах. Когда опытному брокеру предъявили для распознавания графики Мандельброта и те, которые соответствовали общепринятым экономическим моделям, он без колебаний указал на графики Мандельброта как на реальные. Все остальные он отверг, назвав их «слишком гладкими или слишком негладкими». «Это особая, очень тонкая субстанция, но я могу узнать реальные графики, как только увижу их,» — заявил он. Действительно, он ведь наблюдал за этими процессами всю жизнь, и «чтобы его обмануть, кое–что нужно было сделать правильно» [5].

Хотя это произошло уже после Нила, «экономическая глава извилистой карьеры» Мандельброта началась еще в 1959 году. Он проводил тогда долгие часы, изучая то, что для экономистов уже стало фольклором: если из графиков цен для разных промежутков времени убрать все свидетельства о масштабе, то невозможно будет определить, говорят они о днях, месяцах или годах. Предметом пристального внимания Мандельброта стали слишком большие скачки цен, которые не вписывались в общепринятое в то время описание ценовой динамики на базе модели броуновского движения. Модель была впервые предложена Луи Башелье в 1900 г. [34, 36, 37], как оказалось, слишком рано, и прочно утвердилась в экономической статистике в 50—60–х годах. Однако фактическая картина ценовых скачков не вполне соответствовала характерной для броуновского движения колоколообразной кривой нормального распределения. Эмпирические данные свидетельствовали о слишком «толстых хвостах» в реальном распределении. Экономисты о хвостах прекрасно знали, но списывали различие на эффекты шума. Тем не менее, именно в эти мгновения «шума» приобретались и терялись состояния. Мандельброт цитирует проведенное Ситибанком исследование валютных бирж, на которых наблюдались дневные колебания обменного курса доллара к йене на 7,9 %, что в 10,7 раза превышало типичную величину. Согласно теории, «такое не должно было бы случиться ни разу, даже если бы Ситибанк торговал долларами и йенами каждый день в течение 15 биллионов лет с момента Большого взрыва» говорит он. Другой пример: примерно половина падения курса доллара за период с 1986 по 2003 годы произошла за 10 торговых дней из 4695, то есть 46 % падения произошло за 0,21 % от всего торгового времени [3].

В 1963 г. Мандельброт произвел фурор, заявив, что цены не изменяются непрерывно и что для описания ценовой динамики лучше подходит не модель Гаусса, а более общее понятие распределений устойчивых по Леви. Последние, как известно, обладают бесконечной дисперсией, вследствие чего скачки цен, подобно ошибкам при передаче данных, склонны группироваться в кластеры. Оказалось, что имеет место степенная зависимость между размером скачков и частотой их появления и что в формировании цены существенную роль играет предыстория. Эти характерные черты стали для Мандельброта «предчувствием того направления мысли, которое в конечном итоге привело к фракталам» [12].

К «дофрактальному» периоду деятельности Мандельброта относятся также его исследования проблем турбулентности, распределения галактик во Вселенной, распределения на местности больших и малых городов. Не имея возможности рассказать обо всем подробно, отметим только, что и в этих случаях он обнаружил особенности будущих фракталов. Однако нельзя не остановиться на ставшей классической статье «Какова длина побережья Британии?» [19]. Продолжая никем не замеченные изыскания английского ученого Льюиса Ричардсона, Мандельброт продемонстрировал в ней не только бессмысленность применения понятия длины к береговым линиям, но и возможность охарактеризовать числом степень их извилистости — позднее это число стало фрактальной размерностью. Впоследствии он сожалел, что статья получилась слишком абстрактной, а главное — что образ побережья сводился в ней к голым числам и измерениям. Он же хотел внутренне, «до кишек», прочувствовать геометрический образ береговой линии [5]. Поэтому в 1973 г. он вернулся к этой теме и построил модель, которая генерировала острова, неотличимые от настоящих. В следующем году он взялся за построение искусственных гор. В обоих случаях успех превзошел ожидания. Глаза убедили всех: новая математика занимается реальными вещами. Если раньше люди предпочитали держаться подальше от странных статей Мандельброта, то спрятаться от его картин они уже не могли. Изображения искусственных миров показали, что «очень сложные геометрические образы возможно сравнивать друг с другом и с реальностью. Уравнения, стоящие за образами были абстрактными, но сами образы выглядели живыми» [5].

Итак, к 1975 году предмет теории достаточно созрел, пришла пора дать ему имя. Как видим, ни множество Мандельброта, ни множества Жюлиа не имели никакого отношения к зарождению фрактальной геометрии. Только в конце 1970–х годов, когда идея фракталов уже была объявлена, Мандельброт заинтересовался фракталами, инвариантными относительно нелинейных преобразований. Первым стал «объект, рассмотренный впервые самим Пуанкаре» [35], — предельное множество группы Клейна, которое остается неизменным при всех инверсиях относительно любой из нескольких заданных на плоскости окружностей. После этого он обратился к теории итераций рациональных отображений комплексной плоскости, «пиком расцвета» которой были работы 1918—1919 годов французских математиков Гастона Жюлиа и Пьера Фату. Впервые Мандельброт «прочел или просмотрел» их в 1945 г., получив от своего дяди, известного математика, о котором речь пойдет ниже, подаренные ему авторские препринты. Однако тогда он решил, что «это не та геометрия, которую он любил» [18]. Через 35 лет он к этим работам вернулся, расширив рассматриваемые преобразования с вещественной прямой на комплексную плоскость и применив компьютер для построения графических представлений исследуемых процессов. В результате упражнений с «уже побывавшим на свалке и постоянно ломавшимся компьютером» Мандельброт оказался первым человеком, который обнаружил прекрасное и загадочное множество, впоследствии получившее его имя. Не менее четырех филдсовских лауреатов занимались вопросами, напрямую связанными с множеством Мандельброта, но «нужен был человек с особым видением, чтобы увидеть очевидное в математике» [6]. Сейчас это множество стало классикой. В области нелинейных комплексных итерационных процессов оно играет роль константы, так же как числа π и e в математике чисел. Его иногда называют отпечатком большого пальца Бога. Оно «имеет таинственный «иероглифический» характер: включает в себя полный набор деформированных и уменьшенных версий всех множеств Жюлиа» [35] и содержит огромное количество информации о поведении нелинейных процессов. Множество Мандельброта — один из самых сложных объектов современной математики. Доказано, что оно связно и его фрактальная размерность равна 2, но до сих пор неизвестно, является ли оно локально связным и имеет ли положительную площадь [17]. Описание множества Мандельброта сейчас одна из главных проблем комплексной динамики, ее решение повлекло бы глубокие следствия. Как и множества Жюлиа, множество Мандельброта эстетически прекрасно. Неожиданная и необычная красота, открытая миру Б. Мандельбротом — один из основных факторов острого и непреходящего интереса к фракталам даже у тех, кто далек от математики. Поэтому неудивительно, что множество Мандельброта многие знают лучше, чем его создателя.

Оговорка сделана преднамеренно, чтобы подчеркнуть, что и множество Мандельброта, и множества Жюлиа, и фракталы как математические объекты, и фракталы как принцип устройства мира, — не изобретения Мандельброта. Они существуют объективно. В природных формах и процессах, в науке и искусстве, которые этот мир отображают и познают. Именно за «изменение нашего взгляда на мир благодаря идеям фрактальной геометрии» [5] Бенуа Мандельброту была присуждена в 1993 г. почетная премия Вольфа в области физики — такова была формулировка.

Кочевник

Бенуа Мандельброта нельзя отнести к тем ученым, которые всю жизнь решают одну и ту же задачу. Больше того, его задачи относились к разным и даже далеким друг от друга областям знания. Настолько далеким, что между ними, казалось, нет ничего общего, разве что всеми ими занимался он. Однако сам Мандельброт был уверен, что «между его разрозненными набегами в пустынные и безлюдные уголки Неизведанного все же существует какая–то связь.» [35] Теперь, зная итоговый результат — создание новой, междисциплинарной науки (или даже метода! [36]) фрактальной геометрии — можно сказать, что исследованию этой связи и была посвящена вся его жизнь.

Начиналось же все в неизвестности и одиночестве. В преддверии вручения ему престижной Японской Премии[3] в 2003 г. Мандельброт скажет: «Очень давно я стал кочевником–по–желанию — между дисциплинами, и между теорией и приложениями. Избрав жизнь постоянного бродяги, я позволял своим интересам входить и выходить в математику, физику, экономику и различные другие области естественных и социальных наук, и даже в музыку и искусство» [29]. Не задерживаясь нигде надолго, Мандельброт не стал своим ни в одной из этих областей. «Бенуа был аутсайдером для тех независимых областей, к которым прилагались его модели, таким как экономика и гидрология, но он получил мало поддержки и от математиков, которые видели только то, что он использовал уже известные методы», — говорит Ральф Гомори, классик математического программирования, который более 20 лет был «боссом» Б. Мандельброта в IBM. Далее он добавляет: «Недостаток признания, однако, никогда не обескураживал Бенуа. Он оставался верен своим идеям и непоколебимо работал над их развитием и расширением диапазона их применимости, показывая, как одно явление за другим можно объяснить с помощью его работ» [12].

Изучая мир как целое, Мандельброт не принимал во внимание границы между науками. «Я не верю в специализацию,» — заявляет он [7]. Специализация — причина тех стен, которые были воздвигнуты между науками. И хотя эти стены «выше, чем кажутся», они всего лишь психологические. «Я их огромное количество раз переходил. Теперь мне кажется это естественным… и теперь эти стены больше не существуют» [1].

Проблеме выбора того, чем заниматься ученому, Мандельброт посвятил собственноручно написанную им микростатью в справочнике «Кто есть кто в науке?». Он говорит в ней о неприменимости спортивно–соревновательного критерия при оценке научных результатов, при котором бегун не считается настоящим спортсменом, если он «выиграл забег на сто ярдов, а не на сто сорок три» [5]. Мандельброт никогда не держался в пелетоне — он предпочитал бежать свою собственную дистанцию. Молодым ученым он в особенности советует смотреть на мир, «исходя из его интереса и красоты» [7]. Точно так же он сам вместо знаменитых, всеми признанных проблем брался за те, которые были интересны ему: «Я взялся за горы и побережья потому, что находил эти вопросы волнующими» [5]. Главными для него были те естественные вопросы, которые задают дети, как, например, какую форму имеет облако. Но это одновременно одни из самых сложных вопросов, и именно поэтому наука пока «просто оставляла их в стороне» [5]. Фрактальная геометрия ответила на многие из них, причем ответила с единой точки зрения.

Коллеги советовали не распыляться, а сконцентрировать свои усилия в одном направлении, но Мандельброт чувствовал, что широкий взгляд в конечном итоге облегчит ему жизнь. Он не подчинял свои исследования никакому стратегическому плану, но сквозь них объединяющим лейтмотивом проходит общий принцип независимости от масштаба. «Большинство моих работ, — пишет он в предисловии к [34], — были родовыми муками новой научной дисциплины»,

[3] Эта в высшей степени престижная международная премия учреждена Фондом Науки и Технологий Японии. Она вручается в присутствии Императора ежегодно в двух областях за «оригинальные и выдающиеся достижения, способствующие прогрессу науки и технологий и продвижению человечества к миру и процветанию».

фрактальной геометрии. Не претендуя на окончательную истину этого утверждения, Мандельброт исходил из того, что «наука — это поиск небольшого количества центральных идей, которые объясняют как различные части природы согласуются друг с другом» [5]. Построение фрактальной геометрии уверенно следовало этому подходу — она говорит о том, как устроен мир.

Интуиция

Почему же именно Мандельброт сумел разглядеть то единство, которое составило суть понятия фрактала? Почему именно от него Природа не смогла более скрывать свою тайну? Какие стороны его математического таланта способствовали победе? Ответ на эти вопросы Б. Мандельброт никогда не скрывал. Это — его необычайная геометрическая интуиция. Она сопутствовала ему всегда, с детских лет и по сегодняшний день. Продолжим цитату о его интуитивном понимании хаусдорфовой размерности: «если бы мне не удалось развить эти знания и *интуицию* [!], кто знает, может быть и не было бы фрактальной геометрии» [35]. Рассмотрим подробнее как складывалась жизнь ныне знаменитого ученого.

Бенуа Мандельброт родился в 1924 году в Варшаве, в образованной и довольно обеспеченной еврейской семье, которая по обеим линиям происходила из Литвы. Его отец был оптовым торговцем одеждой, свое образование он получил в основном самостоятельно, его увлечением было коллекционирование географических карт. Мать, квалифицированный и уважаемый медик, кроме польского, владела французским, немецким и русским языками. После того, как их предыдущий ребенок умер от эпидемии, родители не хотели отправлять мальчика в школу, поэтому его воспитателем и учителем стал дядя. Учил он ребенка своеобразно, никогда не заставлял запоминать ни таблицу умножения, ни алфавит [1]. В итоге вычисления до сих пор доставляют некоторые проблемы знаменитому математику. Однако дядя тренировал память мальчика и развивал у него независимое и творческое мышление [14]. Вспоминая те годы, дядя писал, что Бенуа «проводил время, играя в шахматы, изучая карты и рассматривая широко открытыми глазами окружающий мир» [1]. Замечание Мандельброта о своей игре в шахматы показательно: «Я играл в интуитивные шахматы. У меня было ощущение пространственной взаимосвязи участков» [1]. Такое обучение в детстве, вероятно, способствовало развитию его геометрической интуиции, утверждает сейчас Мандельброт [14].

В то время как Мандельброт сохранил исключительно радужные воспоминания о своем детстве, для его родителей это было далеко не простое время. Упадок отцовского бизнеса, вызванный экономическими проблемами Польши, и ухудшение отношения к евреям вынудили семью оставить страну и в 1936 году переехать в Париж. Там заботу об образовании молодого Мандельброта взял на себя младший брат отца профессор математики и механики в Коллеж де Франс Шолем Мандельброт (1899—1983). Он эмигрировал во Францию намного раньше, когда ему было 20 лет по причинам чисто интеллектуального характера [14]. Благодаря ему, юный Бенуа рано понял, что математика — живая наука, а не собрание пыльных фолиантов. Дядя Шолем обожал искусство и даже сам рисовал по воскресеньям. Таким образом, искусство и математика стали для мальчика «разновидностью прозы, подчиненной тысяче правил, и связанными так, как связаны между собой образ и слово» [1]. После занятий математикой природная склонность Мандельброта воспринимать мир в образах трансформировалась в геометрическую интуицию. «Мое мышление почти полностью визуальное. <…> я распознаю геометрические формы по очертаниям, а не по математическим формулам» [5]. Превращение произошло не само собой — Мандельброт не раз отмечает, что свою геометрическую интуицию он в значительной мере развил сам. Однако вернемся в тридцатые годы.

Приближающаяся война заставила семью Мандельбротов в 1939 году уехать в бедную центральную Францию, в город Тюль. Безусловно, переезд сильно осложнил их жизнь и, в частности, образование Бенуа, но, как ни странно, трудности помогли ему сохранить свой геометрический дар. «В нормальных условиях, как любой одаренный к математике молодой человек, я должен был бы пройти курс классического образования и мой вкус к образам был бы тогда разрушен,» — говорит он [1]. В те годы «образ из французского образования исключался.» Все больше набирал силу коллективный французский математик Никола Бурбаки, одним из основателей которого был и Шолем Мандельброт. Превыше всего в математике ценилась формализация, «образ был порицаем и презираем» [1]. Такая позиция неизбежно переносилась в образование. Геометрической интуиции в нем не оставалось места, а то, чему нет места, угасает, особенно такая тонкая субстанция, как интуиция. «Интуиции нельзя научить, но ее очень легко подавить,» — предостерегает Мандельброт [34]. И это неизбежно случилось бы… но обстоятельства учебы Бенуа не были нормальными.

В Тюле Мандельброт встретил много замечательных учителей, которые спасались там от оккупации, и окончил школу с наивысшим баллом за всю ее историю. Однако оккупация ужесточалась и ходить на занятия еврею–иностранцу было опасно. Поэтому позже Мандельброт учился нерегулярно, полтора года вообще не учился, какое–то время был учеником инструментальщика на железной дороге и даже конюхом. Однако он не был похож ни на рабочего, ни на конюха и однажды едва избежал депортации [14]. Тем не менее, у Мандельброта были книги, и он продолжал изучать математику «в одиночестве и странным образом» [1]. В январе 1944 г. он поступил в подготовительный класс при лицее в Лионе. Об учебе, проходившей в бедности и страхе, он вспоминает: «В течение двух первых недель я вообще ничего не понимал. Потом однажды профессор математики Отец Кусар написал на доске алгебраическую задачу и, словно ведомый какой–то внешней силой, я поднялся и сказал: «Это точно такая же задача, как вот эта задача по геометрии. И как те другие геометрические задачи.» И тогда проявился мой дар — для меня все было геометрическим. Позднее я вновь встретился с Отцом Кусаром <…>. Он рассказал мне, что в ту зиму он каждый вечер проводил со своим отцом, который тоже был математиком, и они вдвоем разыскивали задачи, для которых я бы не смог сразу же найти геометрическое решение» [1].

Момент первого проявления геометрической интуиции Бенуа Мандельброта заслуживает самого пристального внимания. В своих воспоминаниях он пишет: «Я слушал не только его [отца Кусара], но и еще один голос. Нарисовав рисунок, я почти всегда чувствовал, что в нем чего–то недостает, его эстетическую незавершенность. К примеру, его удалось бы улучшить, применив некоторую проекцию или инверсию относительно некой окружности. После нескольких преобразований такого сорта почти каждый образ приобретал большую гармонию. Древние греки назвали бы новый образ «симметричным», и в должное время симметрии было предназначено стать центральной темой моей работы. После выполнения этих забавных действий даже невозможно трудные задачи оказывались очевидными при тщательном рассмотрении. Необходимую алгебру всегда можно было добавить позже. Даже сложные интегралы я мог вычислять, связывая их со знакомыми образами» [14]. Чуть далее, как ни парадоксально это звучит, Мандельброт добавляет, что овладей он навыками свободного манипулирования формулами, это могло бы повредить его геометрическому дару.

Осень 1944 года Мандельброт провел в Париже, где в лицее Людовика Великого готовился к вступительным экзаменам в университет. Выбрать между Высшей Нормальной и Политехнической школами было нелегко. Дядя советовал Эколь Нормаль, которая открывала перспективу научной карьеры, а отец — Эколь Политехник, поскольку главным считал получение надежной профессии. Несмотря на свои несистематические знания, Мандельброт поступил в обе школы! Талантливый абитуриент сумел скрыть слабое знание алгебры и анализа, применив к задачам геометрическое воображение. (Легко представить, каков был бы результат, сдавай он тесты!) Мандельброт начал университетское образование в Эколь Нормаль, но… период его учебы там оказался едва ли не самым коротким за всю историю школы. Уже через два дня он перешел в Политехническую. Там было немало выдающихся математиков. В частности, дифференциальную геометрию преподавал Мандельброту Гастон Жюлиа, а математический анализ — Поль Леви, который оказал на него огромное влияние; позже Мандельброт назовет его «титаном среди математиков» [34].

Причиной ухода Мандельброта из Эколь Нормаль был царивший там дух Бурбаки. «Увы, Бурбаки имел на математику взгляд очень далекий от моего. Это было движение, которое стремилось к формальному абстрагированию, в то время как я интересовался действительностью» [1]. В [18] он изложил свою точку зрения на роль Бурбаки в математике более подробно: «[Бурбаки] работали очень далеко от тех, кто тяжелым трудом действительно закладывал основания, выкопав ямы в грязном и ненадежном грунте. Они расставляли мебель, как декораторы, а не как строители. Даже хуже, часто казалось, что они тупо предавались задаче уборки дома и ведения хозяйства и принуждали к этому других. <…> Их «формализм а–ля франсе» не был, конечно, бесполезен, но было нелепо позволять ему господствовать в математике, управлять отбором тех, кому предназначено стать математиком, и распространять свое влияние всюду, куда только удавалось. Поэтому я не выносил и боялся Бурбаки». В [36] он высказался еще жестче: «… аксиоматика больше подходит для надгробных памятников, чем для растущей и меняющейся науки». Решительный шаг Мандельброта произвел сильное впечатление и стоил ему впоследствии «яростной враждебности» [1]. Однако этот случай оказался больше чем эпизодом, он стал прообразом дальнейшей судьбы Мандельброта. Через четырнадцать лет, восстав против «бурбакиизированной» математической атмосферы Франции в очередной раз, он окончательно переехал в США. Сейчас он называет себя «идеологическим» беженцем от абстракции» [14].

Математик, Философ, Художник…

Почему Бенуа Мандельброт провел 35 лет под крышей IBM (продолжая и сейчас оставаться ее почетным членом) и только в 1987 году стал (вначале параллельно) профессором Йельского университета? Ответ, как всегда, дал он сам: «Университетские учреждения обычно подразделяются на вполне определенные группы специалистов, в то время как мои интересы распространялись на многие области» [31]. Вторая причина состояла в том, что до признания фракталов финансирование его исследований в университете получить было бы крайне трудно. Кто захочет давать деньги на изучение формы облака? Однако таким человеком оказался Ральф Гомори, выдающийся математик и «менеджер высшего уровня». Его позиция позволила Мандельброту идти в науке своим, «фрактальным путем». Географическая изоляция исследовательского центра IBM затрудняла отслеживание происходящих в науке событий и смены мод, но взамен давала возможность развивать собственные идеи в лишенной помех исследовательской атмосфере.

Математический факультет Йельского университета, где Мандельброт впервые получил постоянное место, также следовал своей особой традиции: «сначала думать о людях», а потом уже о том, чем они занимаются. В своей работе каждый мог следовать туда, куда она его вела, отклонения и повороты согласовывать не требовалось.

Б. Мандельброту трудно присвоить ярлык: «математик», «экономист», «физик», «гидролог»… — любое клише характеризует его не полностью. «Тогда как же меня называть?» — спрашивает он. — «Некоторые действительно называют меня экспериментирующим философом, потому что я философ в глубине души. В этом нет сомнения, но, в некотором смысле, я «математик–без–дефиса», не «чистый математик», не «прикладной математик», и не «математико–физик». И я один из немногих, кто представляет сегодня эту профессию. Для справочника «Кто есть кто?» я написал МАТЕМАТИК И УЧЕНЫЙ или даже МАТЕМАТИК, УЧЕНЫЙ, ИССЛЕДОВАТЕЛЬ И ХУДОЖНИК, что обескуражило издателей, которые предпочитают одно слово» [5].

То, что Мандельброт не «чистый математик», очевидно. Не так легко привести пример доказанной им теоремы. Профессионального математика он сравнивает с шахматистом: «Чтобы по–настоящему играть в шахматы, необходимо достаточно глубоко изучить все великие игры за последние сто лет или более. <…> Для успеха в математике, в дополнение к таланту и мастерству, вы должны мгновенно вспоминать каким образом решались различные технические проблемы. Те, кто делают это особенно хорошо, становятся известны как великие техники. Я абсолютно не техник. <…> Я не прочитал все обо всех тех старых играх. <…> Однако я знаю много замечательных мастеров, решающих задачи, и я часто ищу их, чтобы предложить свои наполовину–испеченные идеи, касающиеся сложных проблем» [5]. Мандельброт считает, что постановка проблем и выдвижение гипотез, с одной стороны, и формулировка и доказательство теорем, с другой, — два вида математической деятельности, и поэтому существование двух типов математиков вполне естественно [13].

«Прикладной математик»? — «Нет. Я никогда не позволял себе удовольствие заниматься той деятельностью, которую обычно называют этим именем. Карикатурное представление о прикладном математике состоит в том, что это консультант, который берет математические методы, не им разработанные, и применяет их по мере надобности к проблемам, которые не он поставил» [5].

Исследователь? — Безусловно. Все творчество Мандельброта направлено на исследование природы. Открытие математического понятия, способного описать нерегулярную геометрию огромного разнообразия природных форм, является одним из важнейших научных достижений второй половины XX века [25]. По выражению Д. Мамфорда, исследовательский подход

Мандельброта состоит в том, чтобы непредвзято оценить то, что хотят сказать имеющиеся в его распоряжении данные, а затем подыскать математику, способную это выразить. Если же таковой нет, то ее приходится создавать [24].

Художник? — Почему бы и нет? «Будучи языком, математика может быть использована не только для того, чтобы сообщать, но среди прочего и для того, чтобы пленять» [16]. Благодаря Мандельброту мы увидели чарующую красоту его знаменитого множества и получили возможность, изучив азы программирования, создавать эту красоту своими руками. Вряд ли удастся назвать другую область математики, которая приводила бы к более пленительным образам, чем фракталы — даже для широкой публики они «оригинальны настолько, насколько это вообще возможно» [35]. Можно вспомнить и фрактальные пейзажи, которые сейчас широко используются в компьютерных играх и в Голливуде. Уже поэтому Мандельброта можно назвать художником. Но есть и более весомые аргументы. Фрактальные структуры отчетливо видны во многих произведениях искусства — живописи, архитектуры, дизайна, музыки [10]. В здании парижской Оперы, в соборе Саграда Фамилиа Антонио Гауди, присутствуют детали любого масштаба. То же самое справедливо и для картин старых мастеров. Фуги И. С. Баха отличаются широким диапазоном тональных и ритмических переходов, несложно вычислить их фрактальную размерность. Фрактальные формы обнаруживаются в абстрактном искусстве и графическом дизайне [38]. После Мандельброта фракталы в искусстве начали использовать сознательно. Появилась, например, интернациональная группа «художников–фракталистов», которые подчеркнуто применяют фрактальные принципы в своих произведениях [4]. Похоже, начинает сбываться предсказание Мандельброта: «Я уверен, что как только художники познакомятся с новыми фрактальными средствами, некоторые из них создадут с их помощью великие вещи» [5].

Связь фракталов с искусством не так уж удивительна. Художники (в широком смысле слова) выражают в своих произведениях результаты эмоционального познания мира, который, как мы теперь знаем, в огромной степени фрактален. Да и сам процесс эмоциональной деятельности, по меньшей мере, не лишен фрактальных свойств. Красота фрактальной природы (или, перефразируя Г. Флейка [8], фрактальная красота природы) стала эталоном нашего эстетического чувства, а значит, то, что мы считаем красивым, должно обладать свойствами фракталов. Говоря об искусстве [5], Мандельброт вспоминает лекции великого Германа Вейля, которые он слышал в Принстоне; из них потом выросла книга «Симметрия» [33]. «Вейль подчеркивал, что идея симметрии у древних, доклассических греков была намного богаче, чем сегодняшнее узкое понятие зеркальных отражений. Для них симметрия выражала вид гармонии между частями и целым.» Не эту ли гармонию воплощают в себе фракталы, соединившие искусство и науку?

Насколько велики основания для того, чтобы называть Бенуа Мандельброта философом? Если вопрос, какова пространственно–временная структура мира, относить к философии, то они, очевидно, есть. Геометрия природных форм и процессов — основной вопрос, который он перед собой ставил. Особенность подхода Мандельброта состоит в том, что, как бы ни была сложна форма, он вовсе не желает ее упрощать. Он не идет по стопам Евклида в стремлении спрямить, скруглить сложную форму, заменить ее уже изученной, с тем, чтобы когда–то в будущем подобраться к ней ближе и точнее, добавив необходимый изгиб в каждом конкретном месте. Наука «не помышляет о *точном* воспроизведении зигзагов, — говорит Мандельброт. — Она ищет скрытое общее» [36]. Он стремится описать форму во всей ее сложности, сразу и целиком. Не следует Мандельброт и принципу Декарта «Разбивай трудности на части», согласно которому, расчленение сложной проблемы на более простые облегчает ее решение. Напротив, он утверждает, что целое часто описать проще, чем составить его портрет по частям. В турбулентном речном потоке ламинарное течение и водовороты сменяют друг друга. Для описания потока, или кленового листа, вовсе необязательно искать сложное уравнение со многими параметрами. Можно воссоздать форму листа, воспроизвести искусственный поток, который ведет себя так же, как его естественный прототип. «Способность к имитации представляет собой не что иное, как разновидность понимания,» — говорит он. Как только подобное описание станет доступным, многие области продвинутся к отличным теориям [36].

Фракталы стали тем понятием, а правила их генерации — тем методом, которые сделали моделирование Природы успешным. 400 лет назад Галилей сквозь телескоп вглядывался в звездное небо, а Кеплер изучал данные астрономических наблюдений. Мандельброт изучал формы и процессы при помощи компьютерного моделирования. В сущности, они делали одно и то же — строили математическую модель Природы. Но если Галилей и Кеплер могли обойтись старыми средствами, то для моделирования более сложных явлений, за изучение которых взялся Мандельброт, пришлось ввести новые понятия. Буквами нового языка стали не треугольники и эллипсы, а фракталы. В результате оказалось, что для объяснения сложных явлений далеко не всегда необходимо искать сложные причины, они могут быть на удивление простыми. Новая революционная парадигма обнаружила порядок и простоту в системах с высокой, на первый взгляд, степенью нерегулярности и сложности. Мир устроен на основании совсем небольшого количества простых идей — это ли не философское открытие Мандельброта?

Новый подход позволил Мандельброту подойти к описанию явлений, сложность которых вызвана игрой случая. В 1964 году в докладе по эпистемологии науки [22] он высказал утверждение о том, что роль случая может быть различной, и выделил два типа случаев: ручной, подчиняющийся закону больших чисел и классической предельной теореме, и дикий, стихийный, для которого это неверно (позднее он добавил к ним еще один, промежуточный). Вопреки распространенному мнению, Мандельброт убежден, что менее развитые науки — это не те, которые оформились позже других, а те, которыми управляет стихийный случай. Классификация случайности переводит научное познание на новую стадию индетерминизма, на которой становится необходимым построение моделей принципиально нового типа. Этот переход влияет не только на детали ответов, но и на выбор тех вопросов, которые имеет смысл задавать [22].

Книги Мандельброта — соединение математики и философии, плюс элементы физики, экономики, биологии, истории... «Фрактальная геометрия возникла как интегрированное целое под управлением философии, которая постигалась и развивалась в условиях, на которые — к добру или нет — в огромной степени влияла история моей собственной жизни. Смог бы другой индивидуум или коллектив достичь этой же философии и построить это же целое?» — спрашивал Мандельброт в 1987 году [22]. Вопрос не такой уж риторический — ответ на него дан почти 20 лет спустя: «Сегодня было бы почти невозможным кому–либо другому войти в орбиту, похожую на мою» [1].

Итог своей научной деятельности Мандельброт кратко подвел в книге [17] и более подробно в [15]. Идя «снизу вверх», от реальных «земных» задач, зачастую игнорируемых другими учеными, он не помышлял о создании некой теории всего или даже новой научной области. «Полностью понять то, что я в действительности осмелился сделать, мне суждено было только постфактум, на склоне моей жизни,» — говорит он.

Сам того не сознавая, Мандельброт посвятил жизнь созданию теории грубых форм[4]. Цвет, температура, вкус и другие воспринимаемые нашими органами чувств свойства предметов давно стали предметом исследования физики, химии. В то же время неровность, грубость, шероховатость поверхностей, которые мы ежедневно ощущаем посредством осязания, сами по себе никогда специально не изучались. Треугольников, имеющих всего три нерегулярные точки, окружностей и других гладких фигур для описания грубых форм недостаточно. «Бесконечный океан сложности включает в себя два острова: один — евклидовой простоты, и второй — тоже относительно простой, остающийся неизменным в любом масштабе, несмотря на присутствие грубости» [15]. Мандельброт ни в коей мере не утверждает, что все то, что негладко, — фрактально. Однако он действительно утверждает, что «после того, как обнаруживается, что реальный предмет не гладок, следующей математической моделью, которую стоит попробовать, является фрактальная или мультифрактальная. Сложная форма не обязана быть фрактальной, но обнаружение того, что она «даже не фрактальна» — плохая новость», ибо до сих пор не создано никаких методов, возможности которых простирались бы за пределы фракталов. Фракталы неприложимы ко всему подряд, но они вездесущи, поскольку неровности присутствуют всюду. И очень часто фрактальные методы «оказываются применимыми в таких областях, которые в любом другом отношении, кроме своей геометрической структуры, изолированы друг от друга» [15].

В интервью [5] Мандельброт говорит, что он «оставил всего лишь царапину на поверхности всего». Однако эта царапина безмерно увеличила фрактальность мира, точнее — меру нашего понимания его фрактальности. Теперь «вопрос в том, какова степень того единства, что может быть создано благодаря этой одной идее.» Далее он добавляет: «Самый верный критерий — критерий времени.» В интервью [1] удовлетворение от того, какое внимание привлекают сейчас

[4] В оригинале: “theory of roughness" [17], [15].

фракталы на многочисленных симпозиумах и конференциях, соседствует с некоторым разочарованием: «… я достаточно одинок в воплощении синтеза.» Тем не менее, Бенуа Мандельброт уверен в том, что «редкие благоприятные молнии» будут и впредь освещать темный междисциплинарный пейзаж. В конце концов, брешь пробита, дорога проложена — Мандельброт доказал справедливость утверждения Германа Вейля: «мир не есть хаос, он есть космос, гармонически упорядоченный посредством нерушимых законов математики» [30].

Личные впечатления

Думаю, будет уместным поделиться личными впечатлениями о Бенуа Мандельброте. Моя первая встреча с ним была заочной. В начале 90–х в Пущино программист Олег Кислюк демонстрировал свои фрактальные пейзажи, и, конечно же, там не обошлось без множества Мандельброта. Публикация «Красоты фракталов» укрепила интерес, таинственная математика манила за картины. Постепенно из хобби вырос небольшой курс фрактальной геометрии. В одной из поездок мне удалось бегло просмотреть FGN [34] и сделать копии нескольких страниц, чтобы внимательно прочесть их позже. Первое впечатление от книги было странным. Это была математика совершенно непохожая на все, с чем приходилось встречаться прежде. Стиль создавал ощущение непосредственного присутствия при рождении идеи. Этому способствовали эмоциональность изложения от первого лица и художественный, хотя и математически точный, язык. Понимание глубины пришло позже, намного раньше — ощущение того, что эта книга — живая классика, а ее создатель — мыслитель масштаба великих энциклопедистов.

В 1999 году меня пригласили участвовать в двух конференциях в рамках программы по фрактальной геометрии, которую проводил Институт математических наук Исаака Ньютона в Кембридже. Бенуа Мандельброт был постоянным участником программы в течение четырех месяцев. Организатор программы профессор Кеннет Фальконер из университета Сент–Андрюс познакомил нас в первый же день во время перерыва на ленч. Мандельброт оказался высоким плотным человеком в будничном темно–коричневом костюме. На голове не слишком причесанный короткий седой ежик. Сквозь сильные линзы очков глаза смотрели внимательно и добро. В них был живой интерес, — по–видимому, к каждому новому человеку. Удивил его английский — долгая жизнь в Америке так и не смогла истребить мягкий и певучий французский акцент. Бенуа Мандельброт сразу же сообщил, что лето 1934 года, когда ему было 10 лет, он провел в маленькой деревушке на территории нынешней Беларуси. Деревушка была бедной, всего в нескольких километрах проходила польско–советская граница. Его предостерегали: «В ту сторону не ходи, там дядька с ружьем стоит». Так с тех пор и не пришлось Мандельброту пересечь восточную границу Польши.

Иногда говорят о заносчивости, надменности Бенуа Мандельброта. Могу утверждать только обратное. Ни в одном разговоре он не дал почувствовать разницу в положении. Он первый мог поинтересоваться впечатлениями о докладах. Однажды разговор коснулся архитектуры Кембриджа — в этом городе невозможно не заговорить об архитектуре. В частности, он поинтересовался, побывал ли я в Кингз Колледж Чепел, и когда узнал, что еще нет, посоветовал обязательно туда сходить. Что я и сделал вскорости, и искренне ему благодарен — сэкономив 6 фунтов, я бы не увидел красоты и величия этого уникального собора.

После торжественного ужина получилось так, что часть пути домой мы с Бенуа Мандельбротом и его женой Альетт шли вместе. На конференцию я брал диктофон, и в тот вечер он был у меня с собой. Мне пришла идея попросить Мандельброта сказать несколько слов белорусским студентам, и, к моему удивлению, он с готовностью согласился. Но поскольку на улице было довольно шумно, мы свернули в какой–то глухой и темный переулок. Место казалось совершенно неподходящим для знаменитостей. Но Мандельброт так не считал. Минуту подумав, он представился и пожелал студентам страны, в которой никогда не был, хорошо делать свое дело — учиться, а в конце добавил: «И давайте встретимся когда–нибудь».

Учиться… Мандельброт продолжал учиться всегда. По–моему, он прослушал все доклады на обеих конференциях. Он всегда сидел в одном из первых рядов. Иногда его голова склонялась, глаза были закрыты… но неожиданно он задавал вопрос, нацеленный в самую суть проблемы. В его собственных докладах всегда говорилось о новых конкретных результатах. Речь текла спокойно и одновременно воодушевленно. Иногда случались отклонения в сторону: он с удовольствием рассказывал о математиках, чьи работы относились к теме доклада. Складывалось впечатление, что он знал почти всех. Когда речь заходила об истории вопроса, на стол проектора одна поверх другой быстро ложились штук шесть «прозрачек» — поперек или наискосок, неважно, — и слышалось: «Это я сделал в этой работе, а этот подход исследовал в той». И становилось удивительно: как много сделал этот большой, спокойный и мудрый человек! Человеческая простота, открытость, интерес к окружающему миру и мудрость — именно эти качества Бенуа Мандельброта я хотел бы выделить в первую очередь. Их подтвердила и вся наша дальнейшая переписка.

Я благодарен судьбе и Кеннету Фальконеру за честь быть с ним знакомым и с удовольствием посвящаю ему эту статью.

14 вопросов Бенуа Мандельброту (январь 2005)

Вопрос: Как Вы думаете, будет ли когда–нибудь дано точное определение фрактала? Или это такое же общее понятие, как и Природа?

ББМ: Я не думаю, что определение «фрактала» стоит искать. Примерно так же плохо определены такие вполне устоявшиеся понятия, как «теория вероятностей», но это никого не беспокоит. Я подробно обсуждаю этот вопрос на страницах 14 и 15 своей книги «Multifractals and 1/f Noise» [21].

Вопрос: Можете ли Вы объяснить как работает Ваша интуиция? Чем различаются геометрический и алгебраический (и другие, если существуют) типы интуиции?

ББМ: Математики используют рисунки разными способами, в совокупности они образуют широкий спектр. На одном его краю находятся те, кто главными считают формулы и слова, но рисунки находят полезными. Даже грубые диаграммы и неполные «визуализации» части своих мыслей помогают им передавать эти мысли коллегам.

На другом краю спектра находятся те, для которых рисунки и слова одинаково важны и помогают друг другу. В прошлом люди старательно вычерчивали треугольник и круг, потом развлекались, добавляя некоторые линии, и, в конечном счете, наблюдали, что некоторые точки пересечения линий вроде бы попадают на новые прямые линии. Каждое такое наблюдение добавляет новое предположение для доказательства. Эта процедура была обычной для Евклида, но впоследствии исчерпала себя. После Понселе она потеряла созидательность и вышла из употребления, оставшись чисто педагогическим средством.

Мой вклад состоял в том, чтобы возродить ее благодаря компьютеру. Я показал, что исчерпала себя не процедура как таковая, а всего лишь человеческая рука.

Способность увидеть новые образы за исходными данными всегда считалась даром, которым обладают многие представители рода человеческого, но не все. Это тоже общепризнано и очень хорошо выражено у Пуанкаре и Феликса Клейна.

Вопрос: Вы несколько раз говорили, что развили свою интуицию самостоятельно. Как Вы это делали? Можете ли Вы дать какой–нибудь совет, чтобы другие могли сделать то же самое?

ББМ: Кто знает? В подарок на свадьбу мы получили от Матери кавказский ковер, который она сама получила в качестве свадебного подарка от своей кузины, жившей в Баку. (Сейчас это суперантиквариат — около века в одной семье.) Мать говорила, что я учился ползать на этом ковре. Это могло бы означать, что Евклидовым структурам меня научил этот ковер. Это дикая мысль, но ковры с четким геометрическим узором так и остались моими любимыми.

Если более серьезно, то Отец был очарован картами. Они заполняли дом, и я очень рано научился их читать и связывать друг с другом детальные и грубые карты.

Шахматы — игра пространства, я выучил ее рано и играл много, до тех пор, пока мы не уехали из Восточной Европы в Западную.

Все это предположения. Менее предположительны два факта. Школы не имеют никакого понятия о том, как взрастить геометрическую интуицию, а вот вдалбливать алгебру — задача простая, как для обучения, так и для оценивания, даже механического, и школы очень хорошо в этом преуспели. Однако в повседневном английском есть глубокая поговорка: «используй или потеряешь». Следствием постоянного вдалбливания является то, что геометрическая интуиция может зачахнуть вовсе. Это приводит к ужасающему парадоксу: полностью дезорганизовав мое образование, Гитлер, возможно, помог сохранить мою интуицию.

Вопрос: Прокомментируйте , пожалуйста, свою фразу из интервью 1984 года для журнала «Omni»: «Я уверен, что как только художники познакомятся с новыми фрактальными средствами, некоторые из них создадут с их помощью великие вещи». И в связи с этим, Вы, конечно, знаете о «Группе Искусства и Сложности», объединяющей художников–«фракталистов». Находите ли Вы их работы более фрактальными, чем те, которые были созданы некоторыми художниками в «дофрактальную» эпоху?

ББМ: После того интервью в «Omni» я познакомился со многими художниками, которые находили вдохновение во фракталах. Но, по правде говоря, наше время очень неблагоприятно для художников. Поэтому я провел намного больше времени, размышляя о том, что в работах таких давно умерших гениев, как Хокусаи, фрактальность исключительно интуитивна, но очевидно присутствует. Более того, музыка находится в лучшем положении, чем живопись, и она полна фракталами.

Вопрос: Давайте обратимся к музыке, но не будем касаться Баха, так как фрактальность его фуг хорошо известна. Видите ли Вы фрактальные черты в операх Вагнера или в симфониях и поэмах Скрябина, в которых напряжение колеблется бесконечно; в произведениях Шенберга или Шнитке, которые почти всеми воспринимаются как хаотические; или в джазовых композициях, постоянно уходящих и возвращающихся к своей главной теме?

ББМ: Фрактальная природа музыки очень хорошо просматривается. Впервые она была обнаружена (с использованием спектрального анализа) физиком, моим бывшим коллегой Ричардом Ф. Фоссом. На его работу имеется ссылка в ФГП = «Фрактальная Геометрия Природы». Его выводы вскоре были подтверждены на языке музыки двумя композиторами: родившимся в Трансильвании Гиорги Лигети, которого часто считают величайшим из композиторов настоящего времени, и американцем Чарльзом Вуориненом. Оба стали добрыми друзьями.

Вопрос: Вы начали свои исследования с лингвистики. В каких литературных жанрах Вы видите больше фракталов: стихах, народных сказках и песнях, эпосах Гомера или Лонгфелло…? Можно ли по произведению определить автора?

ББМ: «Лингвистика» — слово, имеющее очень специфическое значение, которое на самом деле не приложимо к теме моего исследования. Мой вклад состоял в объяснении универсальной общности для всех языков того, что распределение словарных частот подчиняется закону Ципфа.

Вопрос: С какими достижениями или направлениями в искусстве Вы бы посоветовали ознакомиться математикам и другим ученым? И наоборот, какие научные принципы и математические закономерности было бы полезно знать людям искусства?

ББМ: Спонтанно и с незапамятных времен художники активно использовали инвариантности относительно сдвигов и вращений — это классика; а также относительно растяжения и сжатия – что, конечно же, характеризует фрактальность. Для современных художников соответствующие математические достижения одновременно и наиболее просты для восприятия, и наиболее полезны.

Вопрос: Каковы Ваши аргументы за и/или против изучения фрактальной геометрии в школе?

ББМ: За — их Вы можете найти во вводном разделе книги, которую мы написали с М. Л. Фреймом[5].

Против — инерция, пессимизм («это все равно не сработает, так что нечего и беспокоиться»), боязнь местного начальства («мой босс их не любит — хотя на самом деле ничего о них не знает, но слышал, что это всего лишь мода». Однако моды длятся 3 недели, 3 месяца, 3 года, но не 30 лет).

Вопрос: Означает ли фрактальность естественных структур, таких как растения, ландшафты, раковые опухоли и галактики, что те процессы, которые привели к их образованию тоже обладают общими чертами?

ББМ: Вовсе нет. Фрактальность часто является результатом роста. Но глава 11 ФГП утверждает, что фрактальность характеризует также решения многих дифференциальных уравнений.

Вопрос: Как соотносятся между собой теория фракталов и теория хаоса по степени общности?

---

[5] Имеется в виду книга [23]. В ней говорится о том, что преподавание фрактальной геометрии в школе делает изучение математики интересным даже для гуманитариев, красота фракталов привлекает учеников и, что в особенности важно, приближает школьную математику к той границе, за которой начинается неизведанное.

ББМ: Фракталы и хаос имеют очень широкую область пересечения. Она включает, например, множество Мандельброта. Но фрактальные горы (с этой точки зрения) не имеют ничего общего с хаосом, так же как масса исследований хаоса не имеет никакого отношения к фракталам.

Вопрос: В прошлогоднем интервью журналу «Le Monde 2» [1] Вы сказали, что все еще одиноки в воплощении синтеза. Как можно изменить эту ситуацию? Может быть, необходима свежая идея? Что Вы можете сказать о синергетике? Могут ли наука и искусство, представляющие собой два способа познания мира, быть объединены в новой Игре в Бисер?

ББМ: Общество организовано так, что специализация эффективно поддерживается многими способами. Синтез восхваляется до тех пор, пока дело ограничивается словами и обещаниями. Его терпят, пока он бесплоден (например, синергетика очень слабо повлияла на господствующую тенденцию). Более интересные случаи, в которых синтез влияет на общее состояние, одновременно и более сложны. Мир промышленности, в котором я жил 35 лет, часто нуждается в синтезе и принимает его без возражений. Мир науки терпит такие виды деятельности, как биохимия, которые начинались как ограниченный синтез, но вскоре превратились в новые области, в дополнение к старым. Все такие категории игнорируют тех немногих индивидуумов, которые успешно осуществляют широкий синтез, выходящий за пределы двух областей; их решительно ущемляют.

Вопрос: Гарри Флейк в своей книге «Алгоритмическая красота природы» утверждает, что наиболее интересными являются те структуры, которые лежат между строгим порядком и хаосом, подобно тому, как демократия находится посередине между тоталитаризмом и анархией. Может ли знание теорий фракталов и хаоса способствовать принятию верных решений экономических, политических и социальных проблем?

ББМ: Утверждение Флейка длительное время поддерживается многими, в том числе и мной. Но пример, который использую я, другой — а именно, фракталы. Современное состояние экономики, политологии и социологии примитивно, и я думаю, что фракталы окажутся существенными для их дальнейшего прогресса.

Вопрос: Как бы Вы охарактеризовали роль работ Колмогорова, Шарковского и, возможно, других математиков из стран бывшего Советского Союза в создании современных междисциплинарных наук?

ББМ: Я встречал Колмогорова и считаю его работы исключительно вдохновляющими. Однако другие русские ученые, которых я встречал, почти так же специализированы, как и их западные коллеги.

Вопрос: Вы читали лекции во многих странах и университетах. Собираетесь ли Вы прочесть когда–нибудь хотя бы одну лекцию в России, Беларуси, Украине?

ББМ: Я в хорошей форме, но мне на несколько месяцев больше 80, и мне не хотелось бы уже далеко ехать для того, чтобы выступить всего с одной лекцией. Первоочередной приоритет я отдаю написанию нового, продолжаю работать очень напряженно и совершенно не настроен тратить много времени на дорогу. Другим фактором является то, что для того, чтобы моя работа получила широкое признание, потребовалось длительное время, а сегодня меня широко чествуют специфическими способами, и я не в состоянии это остановить: награды, академии, докторские степени и т. д. Это очень приятно, но занимает столько времени [массу времени substantial time]. Наконец, на некоторые конференции я езжу просто для того, чтобы поучиться. Вся эта деятельность не оставляет времени для туризма, любопытства или отдельных лекций. Мне очень жаль, что это так.

Благодарности

Я глубоко благодарен герою данной статьи Бенуа Мандельброту, любезно согласившегося ответить на вопросы и приславшего мне книгу [17] и некоторые статьи из [9]. Фотография также приведена с его любезного согласия. Благодарю своих друзей: профессора Дэна Кемпа, чья диссертация была посвящена биографии идеи фракталов, и который прислал мне свой рассказ о Б. Мандельброте [2]; Дэвида Хейтона, сообщившего о работе [15]; и профессора В. И. Залялина который поддержал мой энтузиазм в работе над статьей и помог избежать математических ошибок.

Список литературы

1. Barthélémy P. Un Genie né dans les Choux: Rencontre avec l'Inventeur des Fractales // Le Monde 2, 16—17 Mai 2004. P. 60—63. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/pdfs/lemonde_barthelemy.pdf
2. Camp D. R. Benoit Mandelbrot: The Euclid of Fractal Geometry // Mathematics Teacher, 2000. Vol. 93. № 8, P. 708—712.
3. Coggan P. The Long View: The End of Normality // Financial Times. July 2, 2004. http://www.math.yale.edu/users/mandelbrot/pdfs/scrapbookOther.pdf
4. Condé S. La Fractalité dans l'Art Contemporain. Paris: La Différence, 2001. 192 pp.
5. Davis M. Profile of Benoit B. Mandelbrot // Omni Magazine, 1984. Feb. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/pdfs/profile.pdf
6. Devaney R. L. Mandelbrot’s Vision for Mathematics // Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot / Eds. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen. (Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72). Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2004. P. 39 — 40.
7. Fairall J. Creative Genius Behind the Theory // The Australian. February 13, 1990. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/pdfs/scrapbookFractals.pdf
8. Flake G. W. The Computational Beauty of Nature. Cambridge, Ma.: MIT Press, 1998. 495 p.
9. Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot / Eds. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen. (Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72). Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2004. 1111 p.
10. Frame M., Mandelbrot B., Neger N. Fractal Geometry, Yale University. http://classes.yale.edu/fractals/index.html
11. Gleick J. Chaos: Making a New Science. New York: Viking Penguin, 1987. 352 p.
12. Gomory R. E. Foreword to: Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. New York: Springer, 1997. 551 pp. P. ix—x.
13. Lapidus M. L. Fractal Geometry and Applications — An Introduction to this Volume // Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot / Eds. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen. (Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72). Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2004. P. 1—25.
14. Mandelbrot B. B. A maverick’s apprenticeship // The Wolf Prize for Physics / Ed. by D. Thouless. Singapore: World Scientific, 2004. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/ pdfs/mavericksApprenticeship.pdf
15. Mandelbrot B. B. A Theory of Roughness. Edge // The Third Culture, 151, Dec. 20, 2004. http://www.edge.org/documents/archive/edge151.html
16. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance, and Dimension. San Francisco: Freeman & Co, 1977. 265 p.
17. Mandelbrot B. B. Fractals and Chaos: The Mandelbrot Set and Beyond. New York: Springer–Verlag, 2004. 308 pp.
18. Mandelbrot B. B. Fractals and the Rebirth of Experimental Mathematics. Foreword to: Peitgen H.–O., et al. Fractals for the Classroom. Introduction to Fractals and Chaos. New York: Springer, 1992. P. 1—16.
19. Mandelbrot B. B. How long is the coast of Britain? Statistical self–similarity and fractional dimension // Science, 1967. Vol. 155. P. 636—638.
20. Mandelbrot B. B. Les objets fractals: forme, hasard et dimension. Paris: Flammarion, 1975. 192 pp.
21. Mandelbrot B. B. Multifractals and 1/f Noise: Wild Self–Affinity in Physics (1963—1976). New York: Springer–Verlag, 1999. 442 pp.
22. Mandelbrot B. B. Towards a second stage of indeterminism in science // Interdisciplinary Science Reviews, 1987. № 12. P. 117—127.
23. Mandelbrot B. B., Frame M. L. Fractals, Graphics, and Mathematical Education. Washington: MAA, 2002. 206 pp.
24. Mumford D. B. My encounters with Benoit Mandelbrot // Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot / Eds. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen. (Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72). Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2004. P. 61—62.
25. Sapoval B. Is randomness partially tamed by fractals? // Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot / Eds. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuijsen. (Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. 72). Rhode Island: Amer. Math. Soc. Providence, 2004. P. 55—56.
26. Stauffer D., Stanley H. E. From Newton to Mandelbrot. New York: Springer, 1996. 209 pp.
27. Strichartz R. S. Analysis on Fractals // Notices of the AMS, 1999. Vol. 46. P. 1199—1208.
28. The MacTutor History of Mathematics archive. http://www–history.mcs.st–and.ac.uk/history/ index.html
29. Weaver J. Yale “Father of Fractals” to be Awarded Prestigious Prize in Japan. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/pdfs/jp_yaleRelease.pdf
30. Weyl H. The Open World. Three lectures on the metaphysical implications of science. New Haven: Yale Univ. Press, 1932. 84 p.
31. York D. Rough edge of math leads to scenery by computer // The Toronto Globe and Mail. 1983. April 8. http://www.math.yale.edu/mandelbrot/pdfs/scrapbookFractals.pdf
32. Библия. Бытие.

33. Вейль Г. Симметрия: Пер. с англ. М.: Едиториал УРСС, 2002. 191 с.
34. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 655 с.
35. Мандельброт Б. Фракталы и возрождение теории итераций // Пайтген Х.–О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. М.: Мир, 1993. С. 131—140.
36. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы: Пер. с англ. Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 255 с.
37. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. 333 с.
38. Шлык В.А. Фракталы в абстрактном искусстве и дизайне // Изв. Челябинского науч. центра. 2004. Вып. 1 (22). С. 231—244. http://csc.ac.ru/news/2004_1/2004_1_18_1.zip
39. Шлык В. А. В защиту «Хаоса», фрактальной геометрии, Бенуа Мандельброта и Анри Пуанкаре // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2002. Вып. 5. http://scholar.urc.ru:8002/ ped_journal